

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# ZAVRŠNI RAD

Nikola Čegec

U Zagrebu, 2013.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# ZAVRŠNI RAD

## **Ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika**

(Stress cycle in spur gear tooth root)

Nikola Čegec

Mentor:

Prof.dr.sc. Krešimir Vučković

U Zagrebu, 2013.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja  
tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof.dr.sc Krešimiru Vučkoviću te profesoru  
prof.dr.sc Smiljku Rudanu na uloženom trudu, pruženoj pomoći i  
korisnim savjetima prije i tokom izrade ovog rada.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci mami  
Božici, sestri Antoniji i posebno tati Mirku na svim znanjima koje je  
prenio na mene.

*Nikola Čegec*

## Sažetak rada

Tema ovog završnog rada je analiza naprezanja u korijenu zuba zupčanika. Predmet analize su geometrijski idealni zupčanci s vanjskim evolventnim ozubljenjem ravnim zubima uz pretpostavku da su oba zupčanika izrađena iz istog materijala te da je materijal homogen, izotropan i linearno elastičan. Analiza je izvršena na gonjenom zupčanicu za karakteristične točke zahvata duž zahvatne linije numerički pomoću metode konačnih elemenata primjenom programskog paketa ABAQUS/Standard. Radi mogućnosti provjere dobivenih rezultata i usporedbe korištenih metoda, najveće normalno naprezanje u korijenu zuba je prvotno analitički određeno prema ISO 6336 normi. Nakon dobivenog analitičkog rezultata, analizirano je vršno naprezanje u korijenu zuba primjenom programskog paketa ABAQUS/Standard za različite korištene konačne elemente i različite gustoće diskretizacije uz usporedbu s analitičkim rješenjem. Na taj je način određena točnost provedenog postupka metodom konačnih elemenata uz određen tip i veličinu elemenata za diskretizaciju te se nastavlja s izradom dvaju modela za analizu naprezanja u korijenu zuba. Prvi je ostvaren tako da su zubi opterećeni koncentriranim silama u karakterističnim točkama zahvata kako opisuje norma DIN 3990 [1], a drugi modeliranjem kontakata između zubi pogonskog i gonjenog zupčanika te njihovim postavljanjem u karakteristične točke zahvata. U oba modela je pretpostavljeno ravninsko stanje naprezanja. Na kraju su uspoređeni rezultati dvaju spomenutih modela i analitičkog proračuna prema ISO 6336 normi.

## Sadržaj

1. Uvod .....	10
2. Podaci o zupčanom paru .....	11
3. Analitički proračun nosivosti korijena zuba zupčanika .....	12
3.1. Proračun naprezanja prema normi ISO 6336-3 .....	12
4. Numerička analiza naprezanja u korijenu zupčanika .....	17
4.1. O programskom paketu Abaqus [11] .....	17
4.2. Geometrijski modeli zupčanika [7] .....	20
4.3. Numerički modeli za analizu naprezanja .....	26
4.3.1. Generiranje mreže konačnih elemenata .....	29
Podjela modela na blokove (particije) .....	29
Elementi [8] .....	32
Ispitivanje konvergencije rezultata za odabir veličine i tipa elemenata .....	34
4.3.2. Zahvat zupčanika [7] .....	26
4.3.3. Analiza naprezanja u korijenu koncentriranim silama .....	41
Rubni uvjeti i opterećenja .....	41
Rezultati .....	42
4.3.4. Analiza naprezanja u korijenu definiranjem kontakata između zubi .....	48
Rubni uvjeti i opterećenja .....	48
Rezultati .....	50
5. Usporedba rezultata .....	56
6. Zaključak .....	58
7. Literatura .....	59

## Popis slika

Slika 3.1.1 Definicija kritičnog presjeka zuba [7] .....	16
Slika 4.1.1 Osnove Abaqus analize [11] .....	18
Slika 4.1.2 Osnovni tipovi konačnih elemenata u Abaqus-u [11] .....	19
Slika 4.2.1 Definicija parametara trohoide [7] .....	23
Slika 4.2.2 Generiranje evolventnog i podnožnog dijela profila zuba [7] .....	23
Slika 4.2.3 Geometrijski model gonjenog zupčanika .....	24
Slika 4.2.4 Geometrijski model pogonskog zupčanika .....	25
Slika 4.3.1 Dvostruki zahvat u točkama $D_0$ i $A_1$ .....	27
Slika 4.3.2 Jednostruki zahvat u točki $B_0$ .....	27
Slika 4.3.3 Jednostruki zahvat u točki $D_0$ .....	28
Slika 4.3.4 Dvostruki zahvat u točkama $E_{-1}$ i $B_0$ .....	28
Slika 4.3.5 Podjela gonjenog zupčanika na particije .....	29
Slika 4.3.6 Podjela pogonskog zupčanika na particije .....	30
Slika 4.3.7 Podjela zuba na 2 dodatna područja .....	31
Slika 4.3.8 Zahvat točke B .....	34
Slika 4.3.9 Prikaz referentne točke i kinematske veze, RP-1 – blokirana sva translacijska i rotacijska gibanja .....	35
Slika 4.3.10 Maksimalno naprezanje u korijenu s CPS8R elemntima .....	37
Slika 4.3.11 Konvergencija rezultata naprezanja u korijenu zuba .....	38
Slika 4.3.12 Diskretizirani modeli u zahvatu .....	39
Slika 4.3.13 Diskretizirani aktivni bokovi u zahvatu .....	40
Slika 4.3.14 Raspodjela opterećenja (sile) na zube u zahvatu .....	42
Slika 4.3.15 Raspodjela naprezanja $\sigma_1$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki $B_0$ .....	43
Slika 4.3.16 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki $D_{-1}$ .....	43
Slika 4.3.17 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki $A_0$ .....	43
Slika 4.3.18 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki $B_0$ .....	44

Slika 4.3.19 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki B <sub>0</sub> .....	44
Slika 4.3.20 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki D <sub>0</sub> .....	44
Slika 4.3.21 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki D <sub>0</sub> .....	45
Slika 4.3.22 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki E <sub>0</sub> .....	45
Slika 4.3.23 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki B <sub>1</sub> .....	45
Slika 4.3.24 Ovisnost naprezanja u čvoru 760 o kutu zakreta ispitnog zupčanika .....	46
Slika 4.3.25 Ciklus naprezanja u čvoru 760 u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika .....	47
Slika 4.3.26 Prikaz referentnih točaka, kinematskih veza i opterećenja momentom gonjenog zupčanika .....	49
Slika 4.3.27 Prikaz definiranog kontakta prilikom zahvata u točki B .....	49
Slika 4.3.28 Raspodjela naprezanja $\sigma_1$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki B <sub>0</sub> .....	50
Slika 4.3.29 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki D <sub>-1</sub> .....	51
Slika 4.3.30 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki A <sub>0</sub> .....	51
Slika 4.3.31 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki B <sub>0</sub> .....	51
Slika 4.3.32 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki B <sub>0</sub> .....	52
Slika 4.3.33 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki D <sub>0</sub> .....	52
Slika 4.3.34 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki D <sub>0</sub> .....	52
Slika 4.3.35 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki E <sub>0</sub> .....	53

Slika 4.3.36 Raspodjela naprezanja $\sigma_x$ u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki B <sub>1</sub> .....	53
Slika 4.3.37 Ovisnost naprezanja u čvoru 3454 o kutu zakreta ispitnog zupčanika ....	54
Slika 4.3.38 Ciklus naprezanja u čvoru 3454 u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika .....	55
Slika 5.1 Usporedni prikaz ciklusa naprezanja u čvoru čiji kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba iznosi 38° u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika .....	56



## Popis tablica

Tablica 1 Podaci o zupčanom paru .....	11
Tablica 2 Podaci o materijalu .....	11
Tablica 3 Prikaz mreža diskretiziranih različitim veličinama elemenata .....	36
Tablica 4 Prikaz rezultata naprezanja za različite tipove elemenata i gustoće diskretizacije (vrijednosti rezultata u MPa) .....	38

## Popis važnijih oznaka

$a$	mm	razmak osi zupčanika
$b$	mm	širina boka zuba
$d$	mm	diobeni promjer
$d_a$	mm	promjer tjemene kružnice
$d_b$	mm	promjer temeljne kružnice
$d_e$	mm	promjer kružnice određen vanjskom točkom jednostrukog zahvata
$d_f$	mm	promjer podnožne kružnice
$d_w$	mm	promjer kinematske kružnice
$h_t$	mm	visina zuba
$h_{Fe}$	mm	udaljenost presjecišta simetrale zuba i pravca na kojem djeluje sila u vanjskoj točki jednostrukog zahvata od kritičnog presjeka
$h_{fP}$	mm	podnožna visina zuba ozubnice
$i$	-	prijenosni omjer
$m$	mm	modul zupčanika
$p_e$	mm	korak na zahvatnoj crti
$s$	mm	debljina zuba
$s_F$	mm	debljina zuba na kritičnom presjeku
$s_{max}$	mm	debljina zuba na diobenoj kružnici
$t$	s	vrijeme
$x$	-	faktor pomaka profila
$x$	-	os kordinatnog sustava
$y$	-	os kordinatnog sustava
$z$	-	os kordinatnog sustava

$z$	-	broj zubi zupčanika
$A$	-	pomoćni faktor u jednadžbi trohoide
$A$	-	početna točka zahvata
$B$	-	početna točka jednostrukog zahvata
$C$	-	kinematski pol
$D$	-	krajnja točka jednostrukog zahvata
$E$	MPa	modul elastičnosti
$E$	-	krajnja točka zahvata
$E$	mm	pomoćni faktor pri izračunu $h_{Fe}$ , $s_F$ , $\alpha_{Fe}$ i $\rho_F$
$G$	-	pomoćni faktor pri izračunu $h_{Fe}$ , $s_F$ , $\alpha_{Fe}$ i $\rho_F$
$H$	-	pomoćni faktor pri izračunu $h_{Fe}$ , $s_F$ , $\alpha_{Fe}$ i $\rho_F$
$K_A$	-	faktor primjene
$K_{F\alpha}$	-	korijenski faktor raspodjele opterećenja na zube u zahvatu
$K_{F\beta}$	-	korijenski faktor raspodjele opterećenja po dužini boka zuba
$K_V$	-	faktor unutrašnjih dinamičkih opterećenja
$T$	Nm	nominalni okretni moment
$Y_F$	-	faktor oblika
$Y_S$		faktor korekcije naprezanja
$\alpha_e$	°	kut profila u vanjskoj točki jednostrukog zahvata
$\alpha_{Fe}$	°	kut pod kojim djeluje sila u vanjskoj točki jednostrukog zahvata
$\alpha_n$	°	kut nagiba zuba ozubnice
$\alpha_w$	°	pogonski kut zahvata
$\beta$	°	nagib boka zuba
$\varepsilon$	-	pomoćni faktor u jednadžbi trohoide
$\varepsilon_a$	-	stupanj prekrivanja profila

---

$\gamma_e$	°	polukut širine zuba na promjeru $d_e$
$\theta$	-	pomoćni faktor pri izračunu $h_{Fe}$ , $s_F$ , $\alpha_{Fe}$ i $\rho_F$
$\theta$	-	pomoćni faktor u jednadžbi trohoide
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\rho_F$	mm	polumjer zaobljenja prijelazne krivulje na kritičnom presjeku
$\rho_{fP}$	mm	polumjer zaobljenja podnožja ozubnice
$\sigma$	MPa	stvarno (lokalno) naprezanje
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	MPa	glavna naprezanja
$\sigma_F$	MPa	najveće normalno naprezanje u korijenu zuba
$\sigma_{F0}$	MPa	nominalno normalno naprezanje u korijenu zuba
$\sigma_{FP}$	MPa	dopušteno normalno naprezanje uslijed savijanja
$\omega$	s <sup>-1</sup>	kutna brzina

## 1. Uvod

U svim granama industrije prilikom izrade strojnih elemenata cilj je postići konstrukciju čim bliže optimalnoj za tražene zahtjeve. Kako bi se cilj ostvario i kako bi određeni strojni element bio optimalno konstruiran, a ne pod ili predimenzioniran potrebno je što je moguće bolje i točnije poznavati i odrediti kritična mjesta te naprezanja koja se javljaju na njima uslijed eksploatacije.

Zupčanici su strojni elementi koji mehanički prenose okretno gibanje i snagu s jednog vratila na drugo s pomoću tzv. veze oblikom, koju u ovom slučaju čini zahvat zubi. Prilikom prolaska zubi kroz zahvat, korijen zuba je izložen savojnom opterećenju koje mijenja svoj položaj, smjer i intenzitet. Takvo opterećenje kao posljedicu nosi promijenjivo naprezanje u korijenu zuba koje se ponavlja svakim okretajem zupčanika. Uslijed okretanja to naprezanje je i cikličko.

Korijen zuba je kritično mjesto kod zupčanika. Stoga je u cilju pravilnog i optimalnog oblikovanja zupčanika nužno što točnije odrediti ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika u zahvatu, kako bi nosivost zupčanih parova bila takva da unutar određenog životnog vijeka ne dođe do nastanka oštećenja ili zamornog loma a samim time i neželjenih posljedica.

## 2. Podaci o zupčanom paru

Predmet analize su geometrijski idealni zupčanici s vanjskim evolventnim ozubljenjem ravnim zubima, prema podacima navedenim u tablici 1.

Tablica 1 Podaci o zupčanom paru

Naziv	Oznaka	Iznos	
		Pogonski zupčanik	Gonjeni zupčanik
Broj zubi	$z$	54	20
Modul	$m$	5 mm	
Širina zupčanika	$b$	10 mm	
Diobeni promjer	$d$	270 mm	100 mm
Osnovni profil ozubnice	-	ISO 53 profil A	
Razmak osi	$a$	185 mm	

Pretpostavljeno je da su oba zupčanika izrađena od čelika 20MnCr5 te da je on homogen, izotropan i linearno elastičan. Podaci o materijalu dani su u tablici 2.

Tablica 2 Podaci o materijalu

Čelik 20MnCr5		
Modul elastičnosti	$E$	206 000 MPa
Poissonov faktor	$\nu$	0,3

### 3. Analitički proračun nosivosti korijena zuba zupčanika

#### 3.1. Proračun naprezanja prema normi ISO 6336-3

U ovome poglavlju opisan je proračun naprezanja u korijenu zuba cilindričnih zupčanika s ravnim zubima prema normi ISO 6336-3 te je također izračunano naprezanje za ispitni zupčanik. Izrazi koje predlaže norma mogu se koristiti za zupčanike s profilom zuba koji je u skladu sa standardnim profilom (profil ozubnice) za evolventno ozubljenje prema [10]. Slučajevi kada se dotični izrazi ne smiju koristiti su; ako je stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha$  manji od 1 ili ako je veći od 2,5, zatim ako postoji interferencija između vrhova i podnožja zubi, te ako su zubi zašiljeni ili je bočna zračnost jednaka nuli. Rezultati proračuna podudaraju se s rezultatima proračuna zupčanika po ranije usvojenim metodama opisanim u [1], [2] i [3] za zahvatne kutove do 25°. Svi kutevi su uvršteni u stupnjevima.

Prema B metodi, kao mjerodavno naprezanje pretpostavlja se naprezanje koje je posljedica djelovanja opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata. Najveće normalno naprezanje  $\sigma_F$  u korijenu zuba računa se prema izrazu

$$\sigma_F = \sigma_{F0} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}, \quad (3.1)$$

gdje je  $\sigma_{F0}$  nominalno normalno naprezanje,  $K_A$  faktor primjene,  $K_V$  faktor unutrašnjih dinamičkih opterećenja,  $K_{F\beta}$  korijenski faktor raspodjele opterećenja po širini zuba, a  $K_{F\alpha}$  korijenski faktor raspodjele opterećenja na zube u zahvatu.

Nominalno normalno naprezanje  $\sigma_{F0}$  odnosi se na najveće lokalno glavno naprezanje u korijenu zuba, te se računa prema izrazu

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m} Y_F Y_S Y_B, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{F0} = \frac{8000 \text{ N}}{10 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}} \cdot 1,55355 \cdot 1,83061 \cdot 1 = 455030400 \text{ Pa} = 455,03 \text{ MPa},$$

gdje je  $F_t$  nominalna tangencijalna sila na diobenom promjeru,  $b$  širina zuba,  $m$  modul zupčanika,  $Y_F$  faktor oblika,  $Y_S$  faktor korekcije naprezanja, a  $Y_B$  faktor debljine vijenca.

Faktor oblika zuba  $Y_F$  uzima u obzir utjecaj oblika zuba na nominalno naprezanje u korijenu zuba, a računa se prema izrazu

$$Y_F = \frac{\frac{6 \cdot h_{Fe}}{m} \sin \alpha_{Fe}}{\left(\frac{s_F}{m}\right)^2 \cos \alpha}, \quad (3.3)$$

$$Y_F = \frac{\frac{6 \cdot 4,83 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \cdot \sin 17,58}{\left(\frac{9,72 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right)^2 \cdot \cos 20} = 1,55,$$

gdje je  $\alpha$  kut nagiba zuba ozubnice,  $h_{Fe}$  udaljenost presjecišta simetrale zuba i pravca djelovanja sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata od kritičnog presjeka,  $s_F$  debljina zuba na kritičnom presjeku, a  $\alpha_{Fe}$  kut pod kojim djeluje sila u vanjskoj točki jednostrukog zahvata. Kritični presjek korijena zuba pri tom je određen spojnicom dviju točki koje se dobiju ako se na prijelazne krivulje povuku tangente pod kutom  $30^\circ$  u odnosu na simetralu zuba kao što se može vidjeti na slici 3.1.1. Iznosi  $h_{Fe}$ ,  $s_F$  i  $\alpha_{Fe}$  određuju se na osnovu izraza:

$$h_{Fe} = \frac{m}{2} \left[ (\cos \gamma_e - \sin \gamma_e \tan \alpha_{Fe}) \frac{d_e}{m} - z \cos \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right) - \frac{G}{\cos \theta} + \frac{\rho_{fp}}{m} \right], \quad (3.4)$$

$$h_{Fe} = \frac{5 \text{ mm}}{2} \cdot \left[ (\cos 4,24^\circ - \sin 4,24^\circ \cdot \tan 17,578^\circ) \cdot \frac{101,216 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} - 20 \cdot \cos(60^\circ - 46,176^\circ) - \frac{-0,87}{\cos 46,176^\circ} + \frac{1,9 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \right] = 4,825 \text{ mm},$$



$$s_F = m \left[ z \sin \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right) + \sqrt{3} \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fP}}{m} \right) \right], \quad (3.5)$$

$$s_F = 5 \text{ mm} \cdot \left[ 20 \sin \cdot (60^\circ - 46,176^\circ) + \sqrt{3} \left( \frac{G}{\cos 46,176^\circ} - \frac{1,9 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \right) \right] = 9,722 \text{ mm},$$

$$\alpha_{Fe} = \alpha_e - \gamma_e = \arccos \left( \frac{d_b}{d_e} \right) - \gamma_e, \quad (3.6)$$

$$\alpha_{Fe} = 21,813^\circ - 4,24^\circ = \arccos \left( \frac{93,969 \text{ mm}}{101,216 \text{ mm}} \right) - 4,24^\circ = 17,578^\circ,$$

gdje su:

$$E = \frac{\pi}{4} m - h_{fP} \tan \alpha - (1 - \sin \alpha) \frac{\rho_{fP}}{\cos \alpha}, \quad (3.7)$$

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot 5 \text{ mm} - 6,25 \text{ mm} \cdot \tan 20^\circ - (1 - \sin 20^\circ) \cdot \frac{1,9 \text{ mm}}{\cos 20^\circ} = 0,3218 \text{ mm},$$

$$G = \frac{\rho_{fP}}{m} - \frac{h_{fP}}{m} + x, \quad (3.8)$$

$$G = \frac{1,9 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} - \frac{6,25 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} + 0 = -0,87,$$

$$H = \frac{2}{z} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m} \right) - \frac{\pi}{3} \quad (3.9)$$

$$H = \frac{2}{20} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{0,3218 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \right) - \frac{\pi}{3} = -0,896554.$$

Broj zubi zupčanika pri tom je označen sa  $z$ , kut profila u vanjskoj točki jednostrukog zahvata s  $\alpha_e$ , podnožna visina zuba ozubnice s  $h_{fp}$ , a polumjer zaobljenja njenog podnožja s  $\rho_{fp}$ . Iznos faktora  $\theta$  izračunava se iterativnim postupkom, s početnom vrijednošću  $\theta=\pi/6$ , iz izraza

$$\theta = \frac{2G}{z} \tan \theta - H, \quad (3.10)$$

Nakon 6 iteracija dobiveno je

$$\theta = \frac{2 \cdot (-0,87)}{20} \tan 46,1716^\circ - (-0,896554) = 46,176^\circ.$$

Promjer kružnice  $d_e$  određene vanjskom točkom jednostrukog zahvata računa se iz izraza

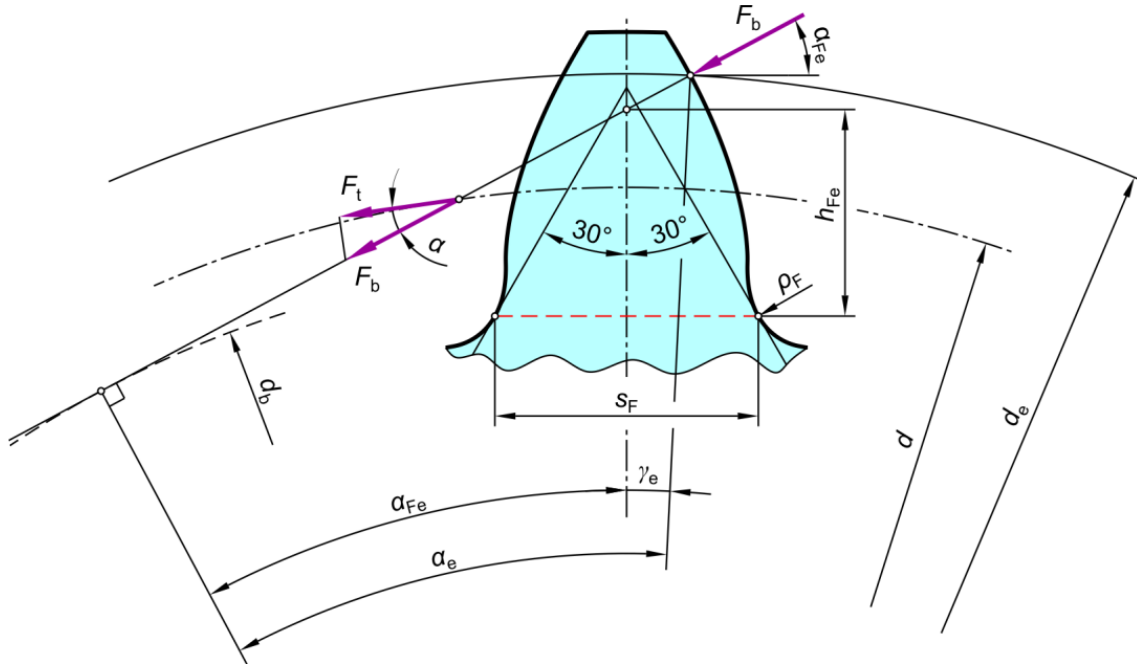
$$d_e = 2 \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} - \frac{\pi d \cos \alpha}{z} (\varepsilon_\alpha - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_b}{2}\right)^2}, \quad (3.11)$$

$$d_e = 2 \cdot \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{110 \text{ mm}}{2}\right)^2 - \left(\frac{93,969 \text{ mm}}{2}\right)^2} - \frac{\pi \cdot 100 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ}{z} \cdot (1,663 - 1) \right]^2 + \left(\frac{93,969 \text{ mm}}{2}\right)^2} = 101,216 \text{ mm},$$

gdje je  $\varepsilon_\alpha$  stupanj prekrivanja profila, a  $\gamma_e$  polukut širine zuba na promjeru  $d_e$ . Polukut širine zuba na promjeru  $d_e$  se računa iz izraza

$$\gamma_e = \frac{1}{z} \left( \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha \right) + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_e, \quad (3.12)$$

$$\gamma_e = \frac{1}{20} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \tan 20^\circ \right) + \text{inv} 20^\circ - \text{inv} 21,8128^\circ = 4,23525^\circ.$$



Slika 3.1.1 Definicija kritičnog presjeka zuba [7]

Faktor korekcije naprezanja  $Y_S$  nominalno normalno naprezanje u korijenu zuba pretvara u lokalno normalno naprezanje, a određuje se analitički pomoću izraza

$$Y_S = \left(1,2 + 0,13 \frac{s_F}{h_{Fe}}\right) \cdot \left(\frac{s_F}{2\rho_F}\right)^{\left[\frac{1}{1,21+2,3 \frac{h_{Fe}}{s_F}}\right]} \quad (3.13)$$

$$Y_S = \left(1,2 + 0,13 \cdot \frac{9,722 \text{ mm}}{6,25 \text{ mm}}\right) \cdot \left(\frac{9,722 \text{ mm}}{2 \cdot 1,9 \text{ mm}}\right)^{\left[\frac{1}{1,21+2,3 \cdot \frac{6,25 \text{ mm}}{9,722 \text{ mm}}}\right]} = 1,83061,$$

gdje je  $\rho_F$  polumjer zaobljenja prijelazne krivulje na kritičnom presjeku, a računa se iz izraza

$$\rho_F = \rho_{FP} + m \frac{2G^2}{\cos \theta (z \cos^2 \theta - 2G)} \quad (3.14)$$

$$\rho_F = 1,9 \text{ mm} + 5 \text{ mm} \cdot \frac{2 \cdot (-0,87)^2}{\cos 46,176^\circ (20 \cdot \cos^2 46,176^\circ - 2 \cdot (-0,87))} = 2,8648 \text{ mm}.$$

## 4. Numerička analiza naprezanja u korijenu zupčanika

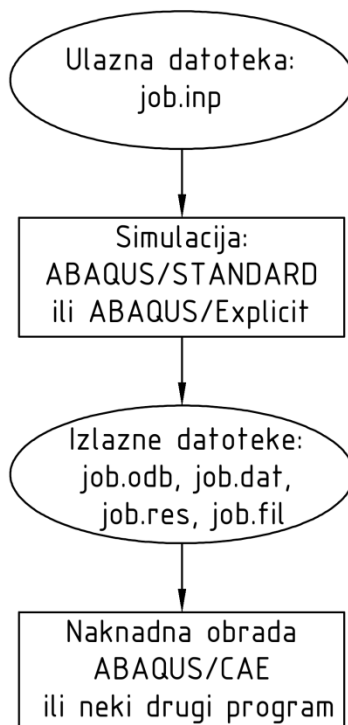
### 4.1. O programskom paketu Abaqus [11]

*Abaqus* je programski paket koji se bazira na metodi konačnih elemenata. Primjenjuje se za rješavanje različitih problema, od analiza pomaka i naprezanja, prijenosa topline, difuzije mase, akustičkih analiza te mnogih drugih. Sadrži veliku bazu elemenata za virtualno modeliranje geometrije. Također je moguće modelirati mnoge tehničke materijale: metale, polimere, kompozite itd. *Abaqus* se sastoji od dva osnovna proizvoda: *Abaqus/Standard* i *Abaqus/Explicit*.

*Abaqus/Standard* služi za analizu opće namjene linearnih i nelinearnih problema i bit će korišten za izradu ovog rada. *Abaqus/Explicit* služi za analize posebne namjene s posebnom formulacijom konačnih elemenata, npr. za analizu kratkih tranzijentnih pojava.

*Abaqus/CAE* je interaktivno grafičko sučelje koje služi za kreiranje modela. Modeliranje započinje kreiranjem geometrije (ili importiranjem iste iz nekog drugog programskog paketa) i podjelom te geometrije na područja zbog dobivanja čim bolje mreže konačnih elemenata. Sljedeći je korak kreiranje prirodnih i geometrijskih rubnih uvjeta, te pridruživanje materijalnih svojstava i geometrije presjeka. Geometrijski rubni uvjeti najčešće podrazumijevaju ograničavanje stupnjeva slobode modela, odnosno sprječavanje željenih translacijskih i rotacijskih pomaka (oslonci, uklještenja, rubni uvjeti simetrije itd.). Prirodni rubni uvjeti najčešće predstavljaju opterećenje modela tj. koncentrirane sile u čvorovima ili raspodijeljeno volumensko, površinsko ili linijsko opterećenje. Slijedi diskretizacija geometrije odabranim konačnim elementima. Osim toga, postoji mogućnost modeliranja nekih posebnih elemenata – npr. pukotina, opruga, prigušnih elemenata, kao i virtualnih elemenata koji služe za npr., dodjeljivanje opterećenja koje je definirano u nekoj točki izvan same geometrije. Sve dosad navedeno spada u radnu cjelinu pretprocesiranja (engl. *preprocessing*). Općenito se rad programa za analizu računanjem metodom konačnih elemenata dijeli na tri radne cjeline (faze). Pretprocesiranje (engl. *preprocessing*),

simulacija (engl. *simulation*) i naknadna obrada (engl. *postprocessing*). Na slici 4.1.1. prikazane su te faze i datoteke koje ih povezuju.

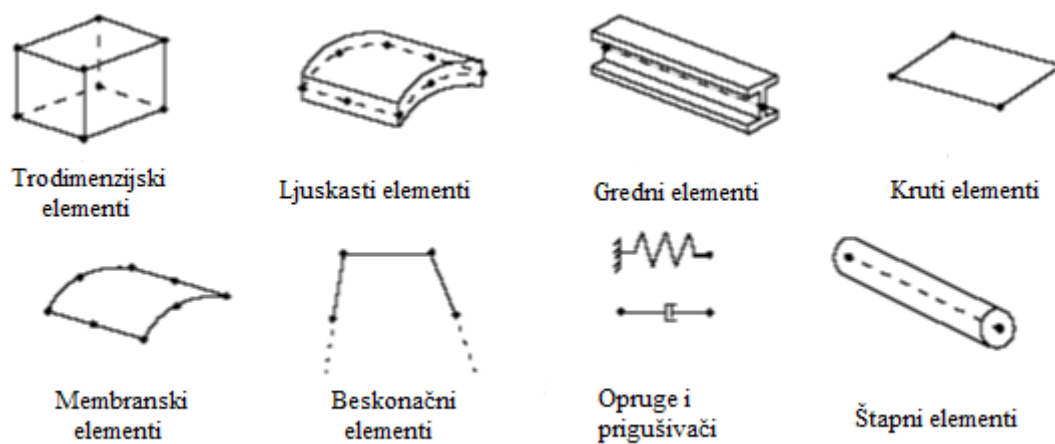


Slika 4.1.1 Osnove Abaqus analize [11]

Samo modeliranje geometrije može biti izvedeno u *Abaqus/CAE*-u, ali i u bilo kojem *Computer Aided Design* (CAD) programskom paketu, pa se taj model može importirati u *Abaqus/CAE*. Moguće je čak cijelu fazu pretprocesiranja izvesti u nekom drugom CAD paketu.

U *Abaqus*-u je dostupan veliki broj i širok spektar elemenata koji omogućuju rješavanje različitih problema, odnosno modeliranje različite geometrije. U ovom će radu biti korišteni dvodimenzijски elementi za analizu naprezanja u ravninskom stanju, međutim *Abaqus* ima biblioteku koja obuhvaća elemente za prijenos topline, difuziju mase, piezoelektričke, elemente za akustičku analizu i još mnogo toga.

Slika 4.1.2. prikazuje osnovne tipove konačnih elemenata u *Abaqus*-u koji se najčešće koriste.



Slika 4.1.2 Osnovni tipovi konačnih elemenata u Abaqus-u [11]

## 4.2. Geometrijski modeli zupčanika [7]

Prije provođenja numeričke analize pomoću MKE potrebno je izraditi geometrijske modele pogonskog i ispitnog zupčanika. Vrlo je važno pravilno modeliranje evolventnog ozubljenja. Dvodimenzijsko modeliranje zupčanika provedeno je direktno u programskom paketu ABAQUS/Standard kako bi se izbjegle moguće pogreške prilikom prebacivanja geometrije iz nekog drugog programskog paketa.

Zupčanici s evolventnim ozubljenjem mogu se izrađivati pomoću alata s ravnim bokovima. Najčešće je riječ o alatu u obliku ozubnice ili odvalnog pužnog glodala. Profil zuba dobiva se pri tom tako da se alat svojim kinematskim pravcem bez klizanja valja po kinematskoj kružnici zupčanika. Ravni bok alata oblikuje tada evolventni, a zaobljeni vrh podnožni dio profila zuba koji se naziva i prijelaznom krivuljom. Vrh profila zuba omeđen je tjemenom, a dno podnožnom kružnicom.

Evolventa kružnice se generira točkom na pravcu (generatrissi) koji se bez klizanja valja po obodu temeljne kružnice promjera  $d_b$ . Kod evolventnih bokova u zahvatu generatrissa je pravac zahvatne crte (geometrijsko mjesto točaka dodira), koji tangira temeljnu kružnicu. Parametarski oblik jednadžbe evolventnog dijela profila u polarnim koordinatama prema [6] glasi:

$$r_{\text{inv}} = \frac{d_b}{2} \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (4.1)$$

$$r_{\text{inv}} = \frac{93,969 \text{ mm}}{2} \sqrt{1 + \xi^2}$$

$$\eta_{\text{inv}} = \xi - \arctan \xi \quad (4.2)$$

gdje je  $\xi$  parametar koji odgovara općenitom kutu generatrise.

Prijelazna krivulja povezuje evolventni profil zuba s podnožnom kružnicom, a u matematičkom smislu je trohoida. Parametarski oblik jednadžbe prijelazne krivulje korijena zuba u polarnim koordinatama prema [6] glasi

$$r_{\text{tro}} = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - B\right)^2 + \left(\frac{B \cos \beta}{\tan \varphi}\right)^2}, \quad (4.3)$$

$$r_{\text{tro}} = \sqrt{\left(\frac{100 \text{ mm}}{2} - 4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi\right)^2 + \left(\frac{4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi}{\tan \varphi}\right)^2} = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot (35,49 \cdot \sin^2 \varphi + 3,6278 \cdot \sin \varphi - 0,65134 \cdot \sqrt{\sin \varphi} + 3,9535),$$

$$\eta_{\text{tro}} = \theta + \varepsilon + \alpha_t, \quad (4.4)$$

$$\eta_{\text{tro}} = 0,076 \cdot (\cos \varphi + 3,1213) + \arctan \frac{4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi}{\left(\frac{100 \text{ mm}}{2} - 4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi\right) \cdot \tan \varphi} + \alpha_t,$$

gdje su  $B$ ,  $\theta$ ,  $A$  i  $\varepsilon$  pomoćni faktori određeni izrazima:

$$B = h_{\text{fP}} - x \cdot m - \rho_{\text{fP}} + \rho_{\text{fP}} \sin \varphi, \quad (4.5)$$

$$B = 6,25 \text{ mm} - 0 \cdot 5 \text{ mm} - 1,9 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi = 4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi,$$

$$\theta = \tan \alpha + \frac{2}{d} \left( \rho_{\text{fP}} \cos \varphi - A - B \frac{1}{\tan \varphi} \right), \quad (4.6)$$

$$\theta = \tan 20^\circ + \frac{2}{100 \text{ mm}} \left( 1,9 \text{ mm} \cdot \cos \varphi - 1,9876 \text{ mm} - 4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{1}{\tan \varphi} \right) = 0,076 \cdot (\cos \varphi + 3,1213),$$

$$A = \frac{\rho_{\text{fP}}}{\cos \alpha} + (h_{\text{fP}} - xm - \rho_{\text{fP}}) \tan \alpha, \quad (4.7)$$



$$A = \frac{0,38 \text{ mm}}{\cos 20^\circ} + (6,25 \text{ mm} - 0 \cdot 5 \text{ mm} - 1,9 \text{ mm}) \cdot \tan 20^\circ = 1,9876 \text{ mm},$$

$$\varepsilon = \arctan \frac{B}{\left(\frac{d}{2} - B\right) \tan \varphi}, \quad (4.8)$$

$$\varepsilon = \arctan \frac{4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi}{\left(\frac{100 \text{ mm}}{2} - 4,35 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi\right) \cdot \tan \varphi},$$

a  $\varphi$  parametar trohoide definiran je prema slici 4.2.1.

U slučaju da korijen nije podrezan što znači da vrijedi

$$\frac{d}{2} (\sin \alpha_n)^2 - [h_{\text{fP}} - xm - \rho_{\text{fP}} + \rho_{\text{fP}} \sin \varphi] \geq 0, \quad (4.9)$$

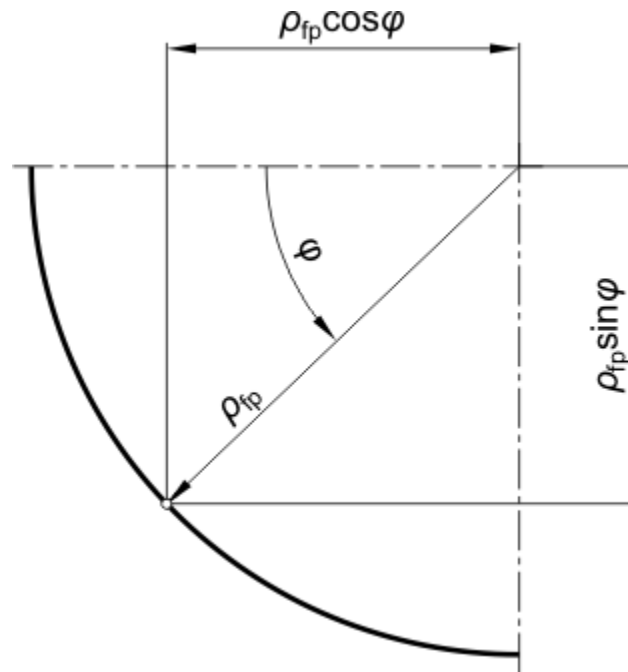
$$\begin{aligned} \frac{100 \text{ mm}}{2} (\sin 20^\circ)^2 - [6,25 \text{ mm} - 0 \cdot 5 \text{ mm} - 1,9 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi] \\ = 1,45 \text{ mm} - 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi \geq 0 \end{aligned}$$

polumjer početka evolvente  $r_{\text{soi}}$  može se odrediti na osnovu izraza

$$\begin{aligned} r_{\text{soi}} = r_{\text{tro},(\varphi=\alpha)} = \\ \sqrt{\left[\frac{d}{2} - (h_{\text{fP}} - xm - \rho_{\text{fP}} + \rho_{\text{fP}} \sin \varphi)\right]^2 + \left[\frac{h_{\text{fP}} - xm - \rho_{\text{fP}} + \rho_{\text{fP}} \sin \varphi}{\sin \alpha}\right]^2} \quad (4.10) \\ r_{\text{soi}} = r_{\text{tro},(\varphi=\alpha)} = \\ \sqrt{\left[\frac{100 \text{ mm}}{2} - (6,25 \text{ mm} - 0 \cdot 5 \text{ mm} - 1,9 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi)\right]^2 + \left[\frac{6,25 \text{ mm} - 0 \cdot 5 \text{ mm} - 1,9 \text{ mm} + 1,9 \text{ mm} \cdot \sin \varphi}{\sin 20^\circ}\right]^2} = \\ 5,22 \cdot \sqrt{\sin^2(\varphi) + 4,58 \cdot \sin \varphi + 7,0765} \end{aligned}$$

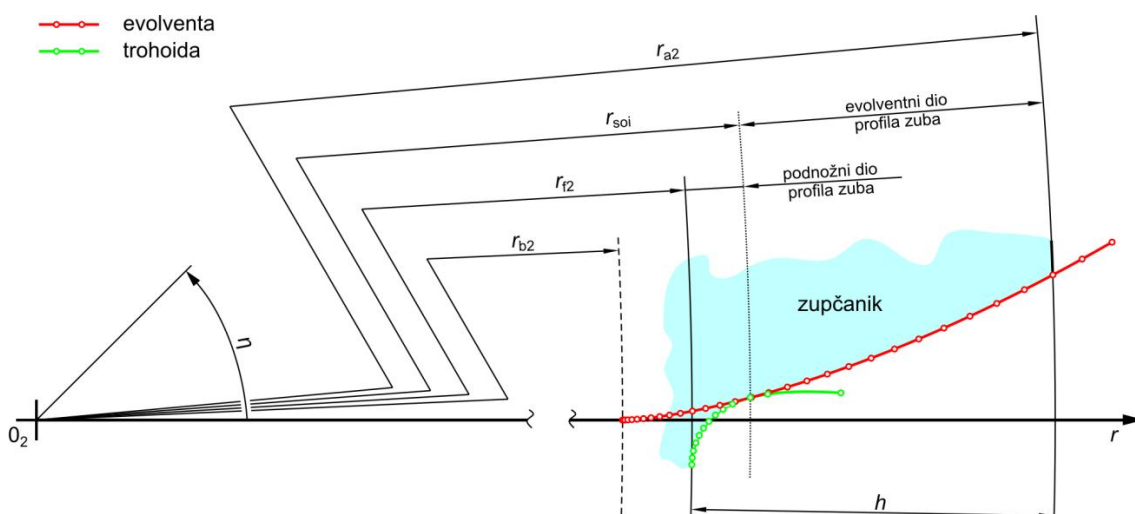
Ako je korijen podrezan tada je sjecište evolvente i trohoide potrebno odrediti pomoću izraza

$$r_{\text{tro}} = r_{\text{inv}} \text{ i } \eta_{\text{tro}} = \eta_{\text{inv}} \quad (4.11)$$



Slika 4.2.1 Definicija parametara trohoide [7]

Na slici 4.2.2. prikazane su točke koje opisuju evolventu i trohoidu ispitnog zupčanika. Dobivene su na osnovu opisanih izraza i geometrijskih karakteristika zupčanika navedenih u tabeli 1.



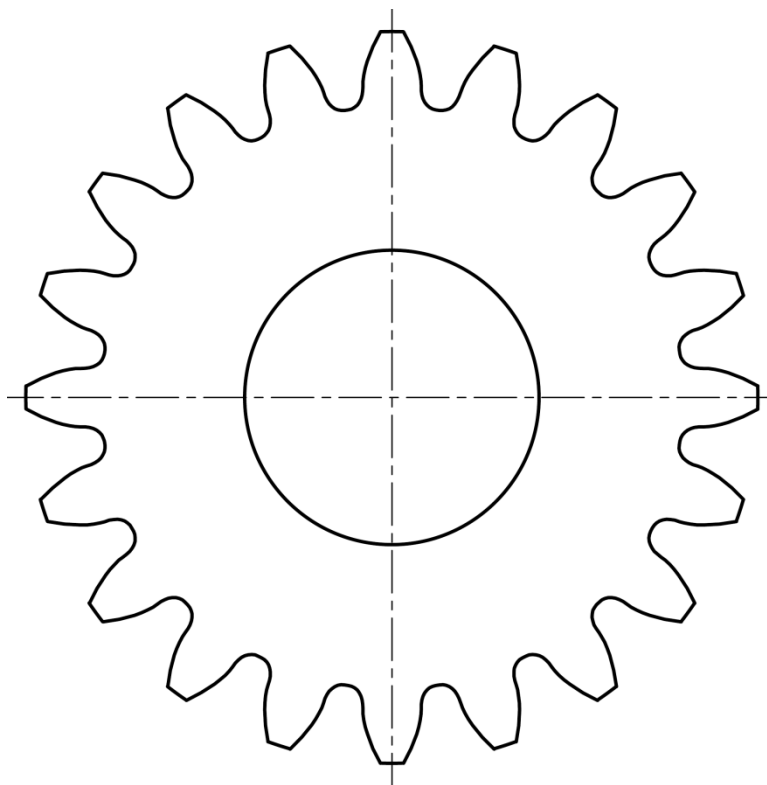
Slika 4.2.2 Generiranje evolventnog i podnožnog dijela profila zuba [7]

Točke koje opisuju trohoidu i evolventu unose se preko svojih koordinata izravno u predprocesor te se kroz tako dobiveni niz točaka provlači *spline* krivulja. Dobivena krivulja zrcali se preko simetrale zuba određene na osnovu njegove poludebljine  $s/2$  na diobenoj kružnici. Debljina zuba  $s$  na diobenoj kružnici izračunava se pomoću izraza

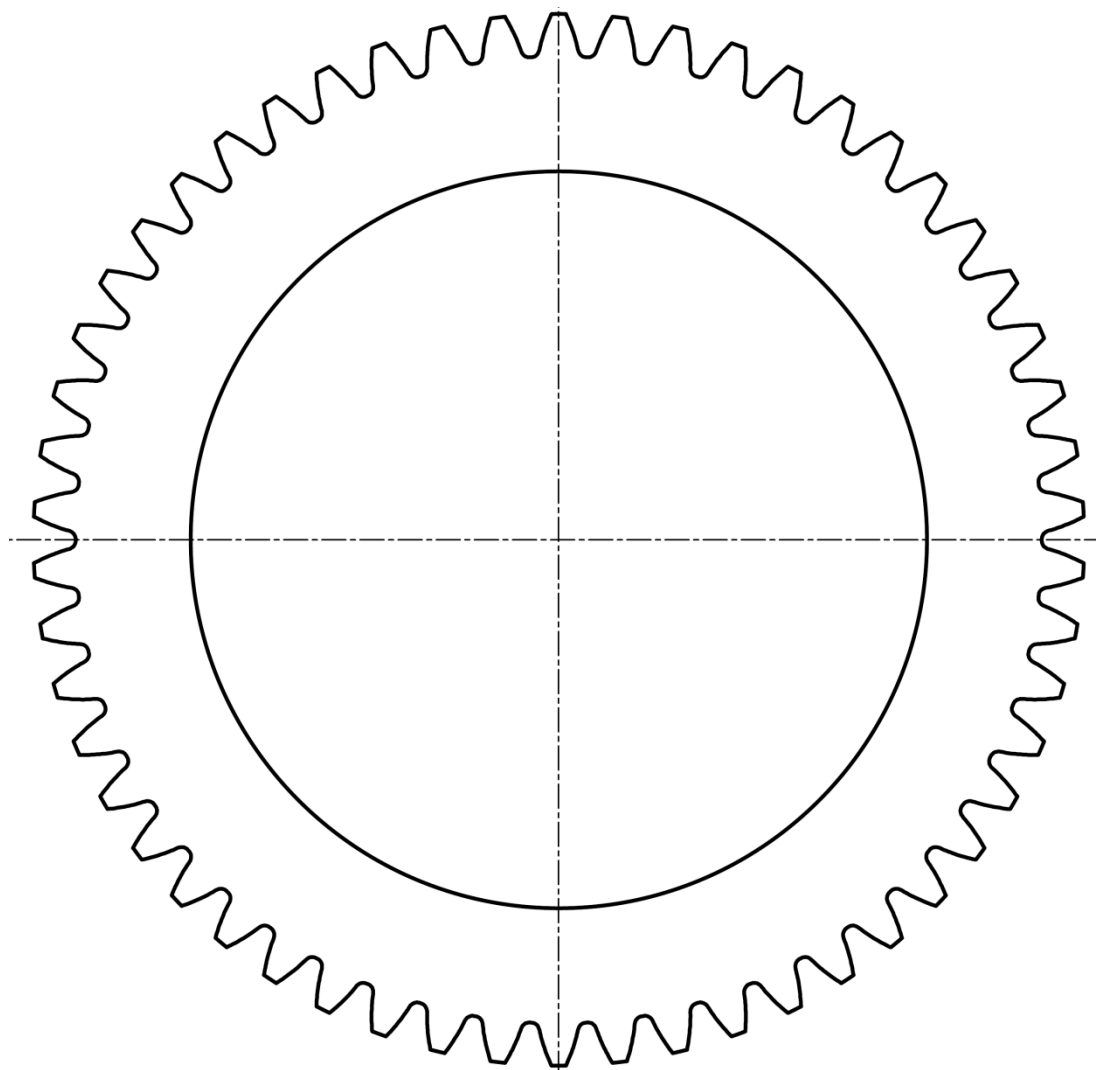
$$s = m \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_n \right), \quad (4.12)$$

$$s = 5 \text{ mm} \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \tan 20^\circ \right) = 7,85398 \text{ mm}$$

Povezivanjem opisanih krivulja lukom tjemene kružnice dobiva se konačna geometrija profila zuba koja se zatim višestruko kopira i rotira oko središta zupčanika za iznos kuta u stupnjevima, gdje je  $j=1, 2, \dots, z$ , a  $z$  broj zubi. Međusobnim povezivanjem susjednih profila lukovima podnožne kružnice dobiva se vanjska kontura zupčanika.



Slika 4.2.3 Geometrijski model gonjenog zupčanika



*Slika 4.2.4 Geometrijski model pogonskog zupčanika*

### 4.3. Numerički modeli za analizu naprezanja

Pošto je debljina zupčanika manja od  $6 \cdot m$  može se pretpostaviti da u radijalnoj ravnini vlada ravninsko stanje naprezanja [12]. Iz tog razloga korišteni su dvodimenzijski modeli zupčanika diskretizirani pomoću četverokutnih konačnih elemenata za ravninsko stanje naprezanja. Veličina i tip elemenata odabrani su ispitivanjem konvergencije rezultata prilikom statičkog opterećenja boka zuba zupčanika koncentriranom silom u točki B te uspoređeni s analitičkim rezultatima prema normi ISO 6336 [6].

#### 4.3.1. Zahvat zupčanika [7]

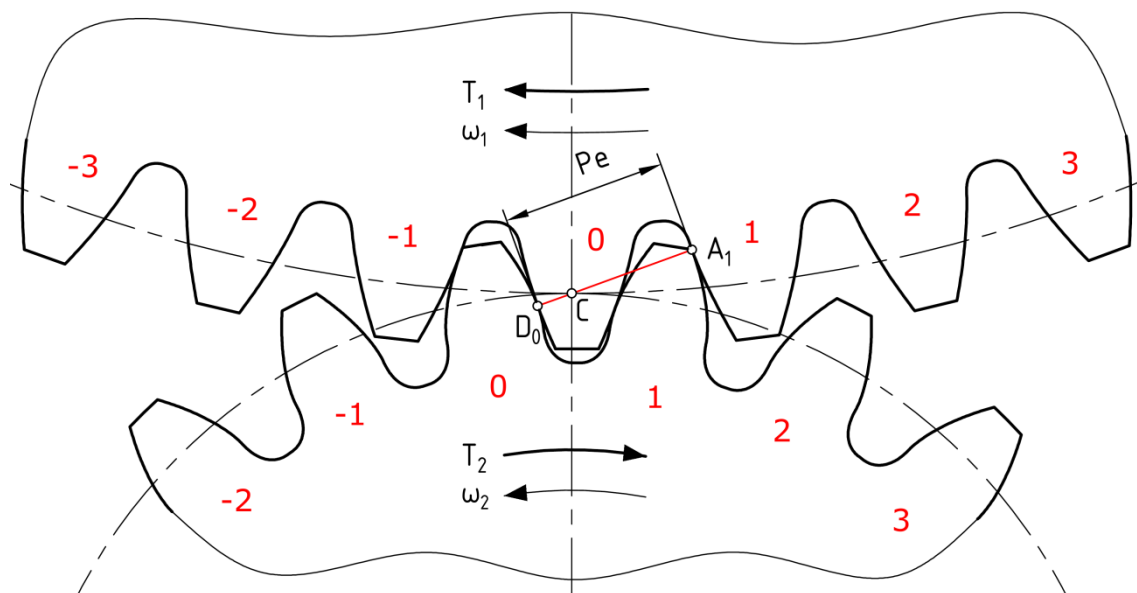
Prolazak jednog zuba kroz zahvat kod idealnih zupčanika, ne uzimajući u obzir trenje među bokovima, može se opisati s 6 slučajeva statičkog opterećenja u karakterističnim točkama zahvata [5]. To znači da je redom potrebno provesti numeričku analizu za sljedeće slučajeve prijenosa opterećenja:

1. dvostruki zahvat u točkama  $A_0$  i  $D_{-1}$ ,
2. dvostruki zahvat točkama  $B_0$  i  $E_{-1}$ ,
3. jednostruki zahvat u točki  $B_0$ ,
4. jednostruki zahvat u točki  $D_0$ ,
5. dvostruki zahvat u točkama  $A_1$  i  $D_0$ ,
6. dvostruki zahvat u točkama  $B_1$  i  $E_0$ .

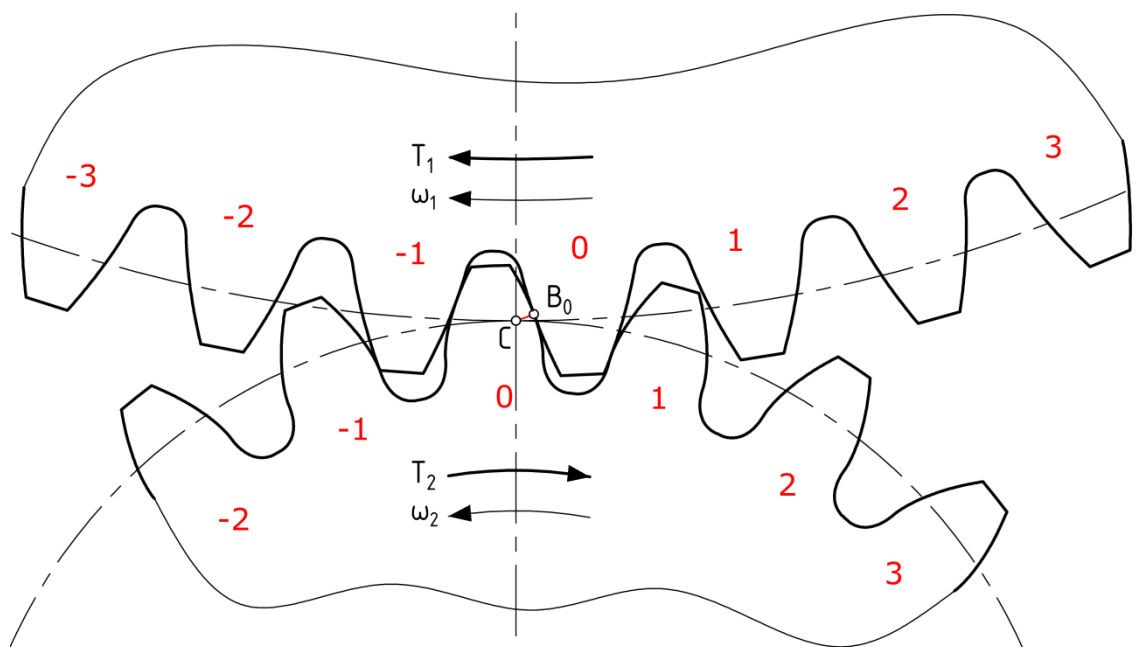
Karakterističnim točkama zahvata zubi koji prethode analiziranom zubu dodijeljeni su negativni, a zubima koji slijede pozitivni indeksi. Broj u indeksu označava redoslijed zuba u odnosu na analizirani zub kojem je dodijeljen indeks nula.

Zbog identičnih uvjeta opterećenja i identične geometrije stanje naprezanja u korijenu analiziranog zuba u trenutnom položaju će biti identično stanju naprezanja u korijenu zuba koji za jedan zub prethodi analiziranom u početnom položaju zupčanika kao i

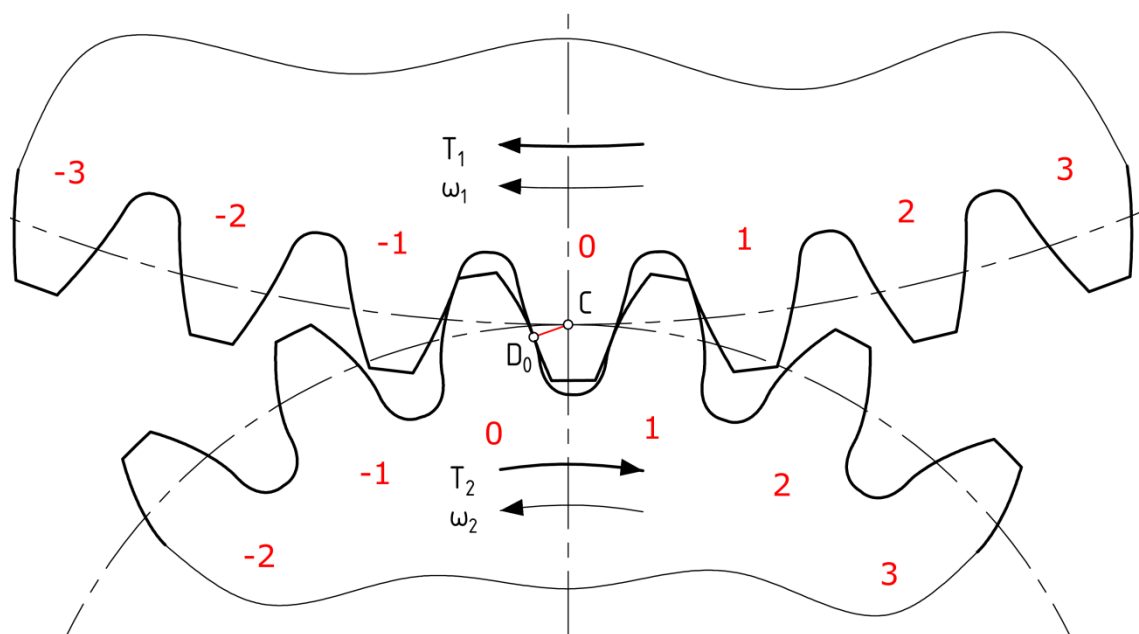
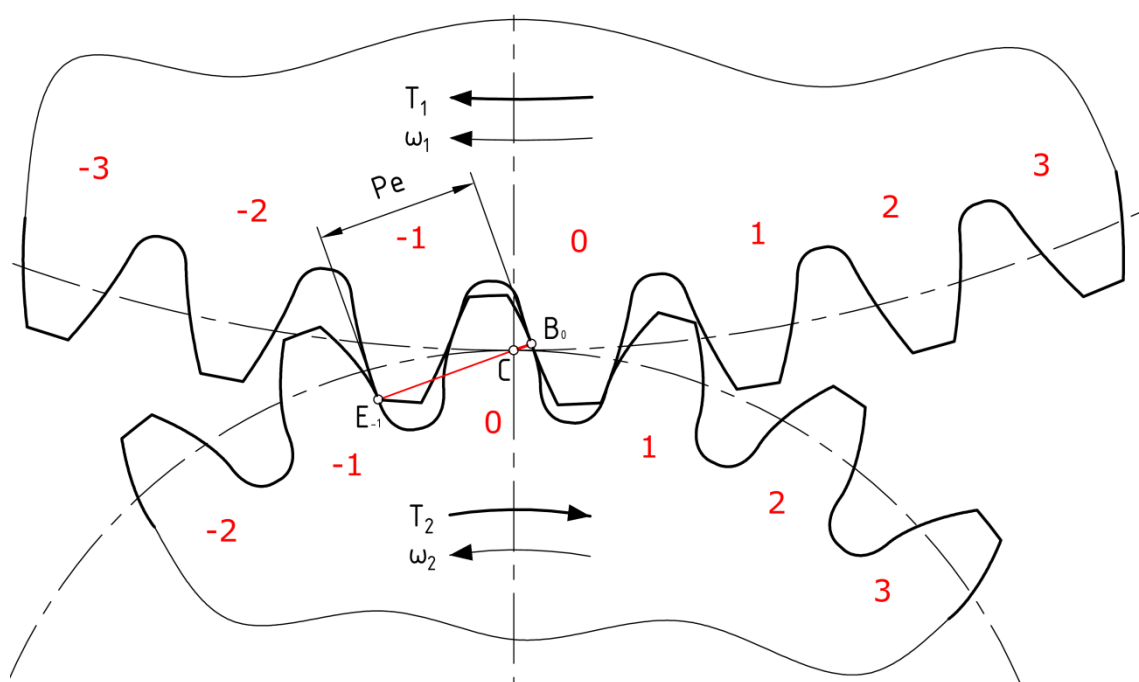
stanjima naprezanja u korijenima svih ostalih zubi. Kako se dvostruki zahvat u točkama D i E zuba koji izlazi iz zahvata podudara s dvostrukim zahvatom u točkama A i B zuba koji ulazi u zahvat, 6 slučajeva opterećenja se svode na 4 slučaja [7] prikazana na sljedećim slikama 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4.



Slika 4.3.1 Dvostruki zahvat u točkama  $D_0$  i  $A_1$



Slika 4.3.2 Jednostruki zahvat u točki  $B_0$

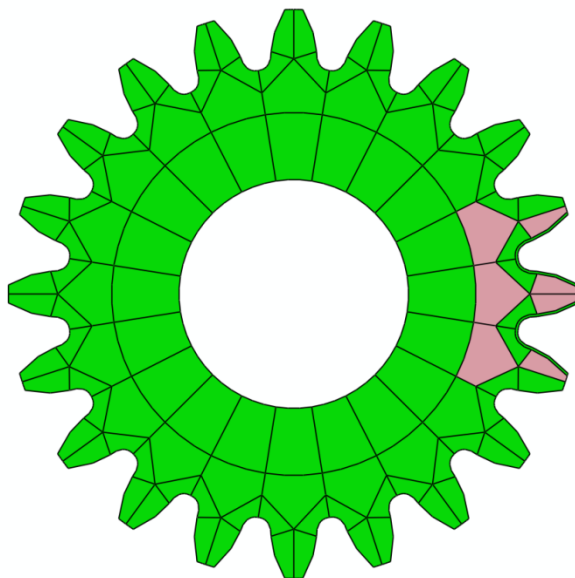
Slika 4.3.3 Jednostruki zahvat u točki  $D_0$ Slika 4.3.4 Dvostruki zahvat u točkama  $E_{-1}$  i  $B_0$

### 4.3.2. Generiranje mreže konačnih elemenata

#### ***Podjela modela na blokove (particije)***

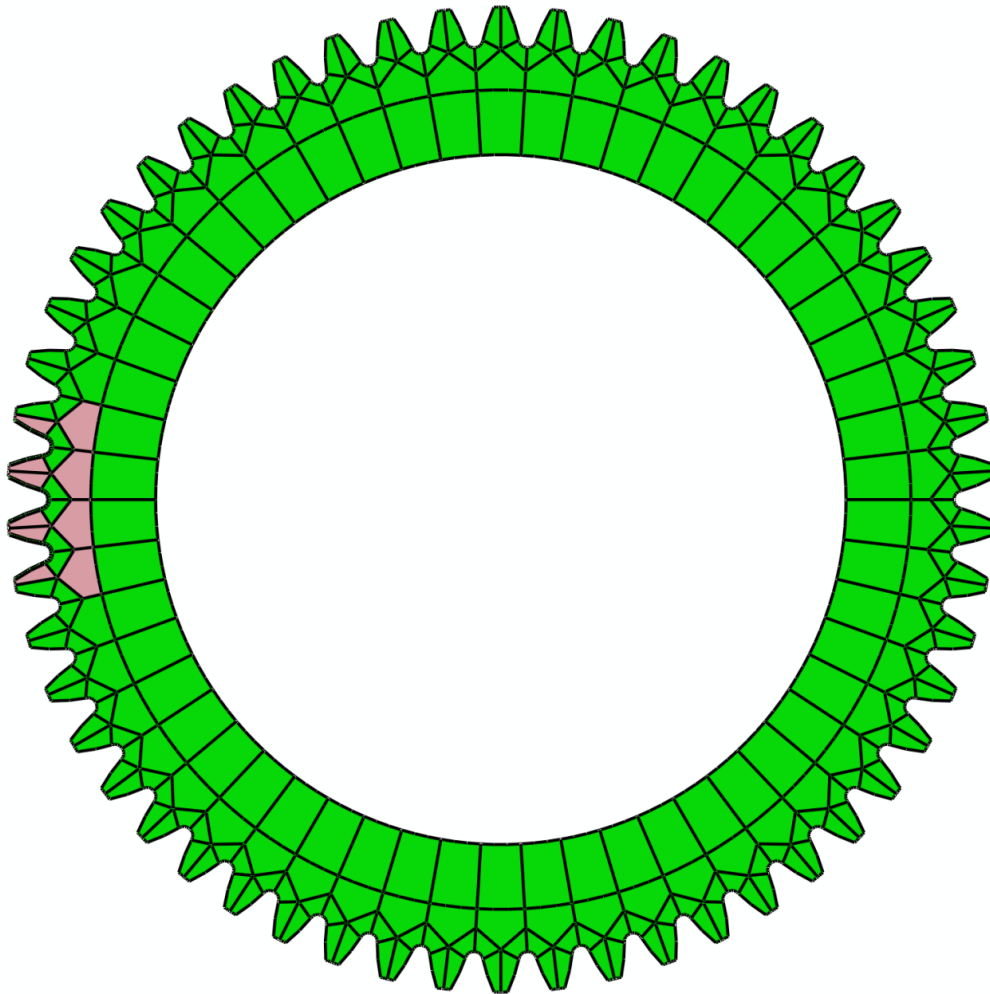
Za uspješnu i kvalitetnu analizu naprezanja u korijenu zuba potrebna nam je vrlo fina mreža sitnih elemenata. S druge strane nije poželjno diskretizirati cijeli model sa sitnim elementima pošto bi rezultat toga bila vrlo računalno zahtjevana i dugotrajna analiza te iz tog razloga diskretizacija cijelog modela sa sitnim elementima ne dolazi u obzir. Stoga kako bismo optimizirali model i na određenim dijelovima zuba zupčanika koji su nam bitni za analizu dobili finu i pravilnu mrežu potrebno je površinu zuba podijeliti na particije.

Kako bi se na zubima koji ne dolaze u zahvat dobila grublja, ali još uvijek strukturirana, a samim time i kvalitetnija diskretizacija cijeli modeli zupčanika podjeljeni su na particije prema slikama 4.3.5. i 4.3.6



*Slika 4.3.5 Podjela gonjenog zupčanika na particije*

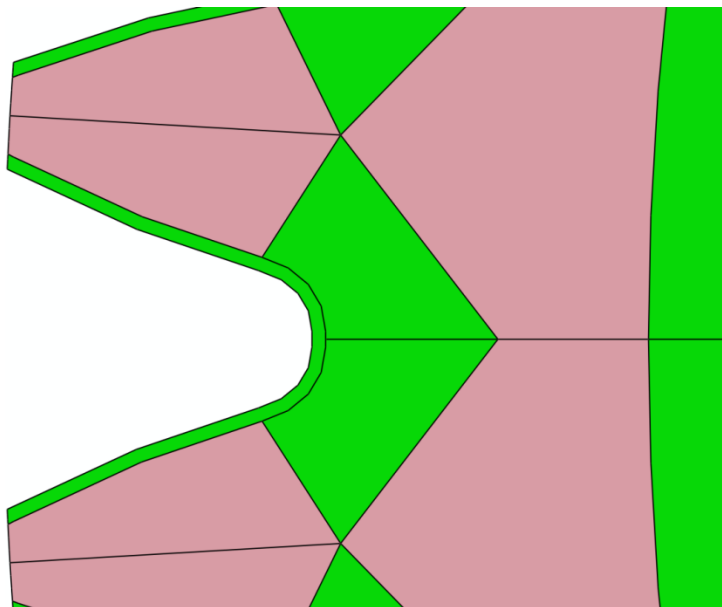




*Slika 4.3.6 Podjela pogonskog zupčanika na particije*

Zubi koji dolaze u zahvat još su dodatno podijeljeni na dvije particije, Slika 4.3.7. Područje u blizini prijelaznih krivulja korijena te aktivnih bokova zubi koji prolaze kroz analizirani zahvat su diskretizirani manjim elementima čija će konačna veličina, a i tip biti određena konvergencijom rezultata.

Particije koje će biti diskretizirane manjim elementima dobiveno je pomoću funkcije „offset“ tako da su krivulje korijena i aktivnih bokova pomaknute 0,5 mm u dubinu zuba.



Slika 4.3.7 Podjela zuba na 2 dodatna područja

## Elementi [8]

Velik broj elemenata koji se mogu koristiti u programskom paketu ABAQUS/Standard nudi korisniku iznimnu fleksibilnost pri izradi proračuna. Nadalje, samo ako je korisnik upoznat s tipovima konačnih elemenata moći će kvalitetno procijeniti koji je element dobro koristiti u kojoj situaciji, a da pritom dobije zadovoljavajuće rješenje, zadovoljavajuću mrežu i da u zadovoljavajuće kratkom vremenu dobije dovoljno točno rješenje.

Elementi se mogu podijeliti prema više kriterija, primjerice prema:

- a) Tipu elementa - ljuskasti, trodimenzijski, membranski, gredni itd.
- b) Broju čvorova - prema obliku elementa  
- prema redu interpolacijske funkcije elementa
- c) Stupnjevima slobode - pomak, rotacija, temperatura
- d) Vrsti integracije - reducirana („reduced“) ili potpuna („full“)

Nadalje, svaki element u programskom paketu ABAQUS/Standard ima jedinstveno ime, poput C3D8 ili S4. Ime elementa odražava njegove karakteristike, pri čemu je klasifikacija elemenata s kojima se radilo ispitivanje konvergencije rezultata:

**CPS4:** Continuum Plane Stress 4 čvora – dvodimenzijski element,

- element prvog reda namjenjen za ispitivanje ravninskog stanja naprezanja,
- 2 stupnja slobode (pomak u x i y osi) u svakom čvoru.

**CPS4I:** Continuum Plane Stress 4 čvora – dvodimenzijski element,

- element prvog reda namjenjen za ispitivanje ravninskog stanja naprezanja,
- sličan kao **CPS4** ali na kraju ima **I** što je oznaka za *incompatible* (hrv. *neuskladiv*),
- ima 4 dodatne varijable u odnosu na **CPS4**.

**CPS8R: Continuum Plane Stress 8 čvora Reduced Integration,**

- element drugog reda namjenjen za ispitivanje ravninskog stanja naprezanja,
- dvodimenzijski element,
- radi se o elementu s 8 čvorova ali s reduciranom integracijom.

**CPS8: Continuum Plane Stress 8 čvora,**

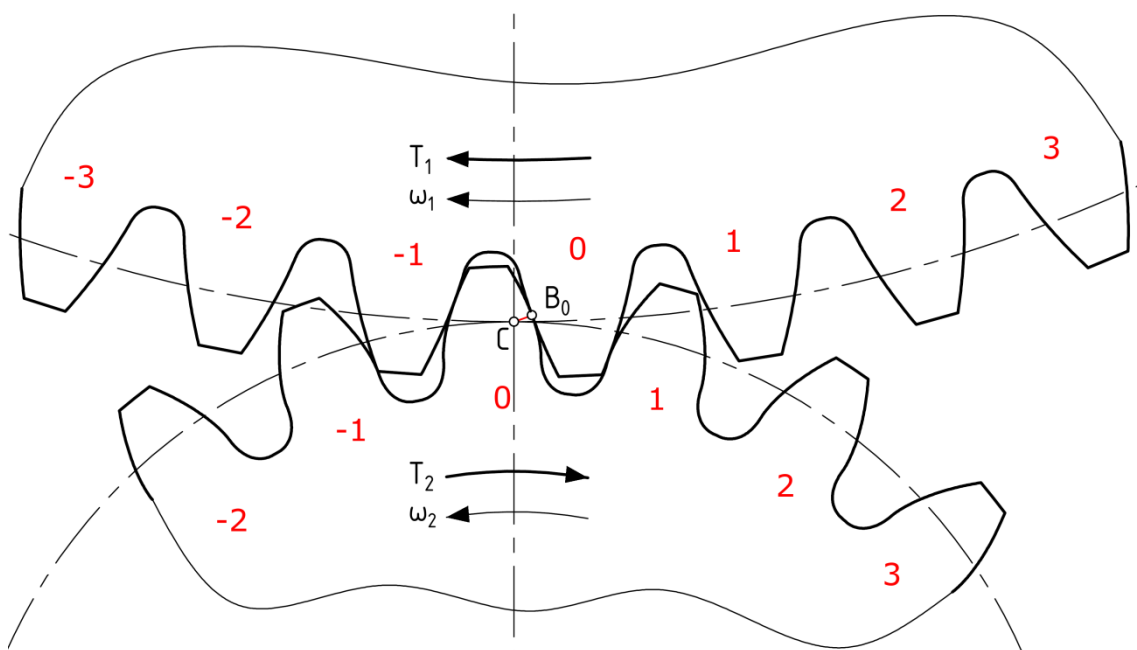
- element drugog reda namjenjen za ispitivanje ravninskog stanja naprezanja,
- dvodimenzijski element,
- element drugog reda s 8 čvorova.

### Ispitivanje konvergencije rezultata za odabir veličine i tipa elemenata

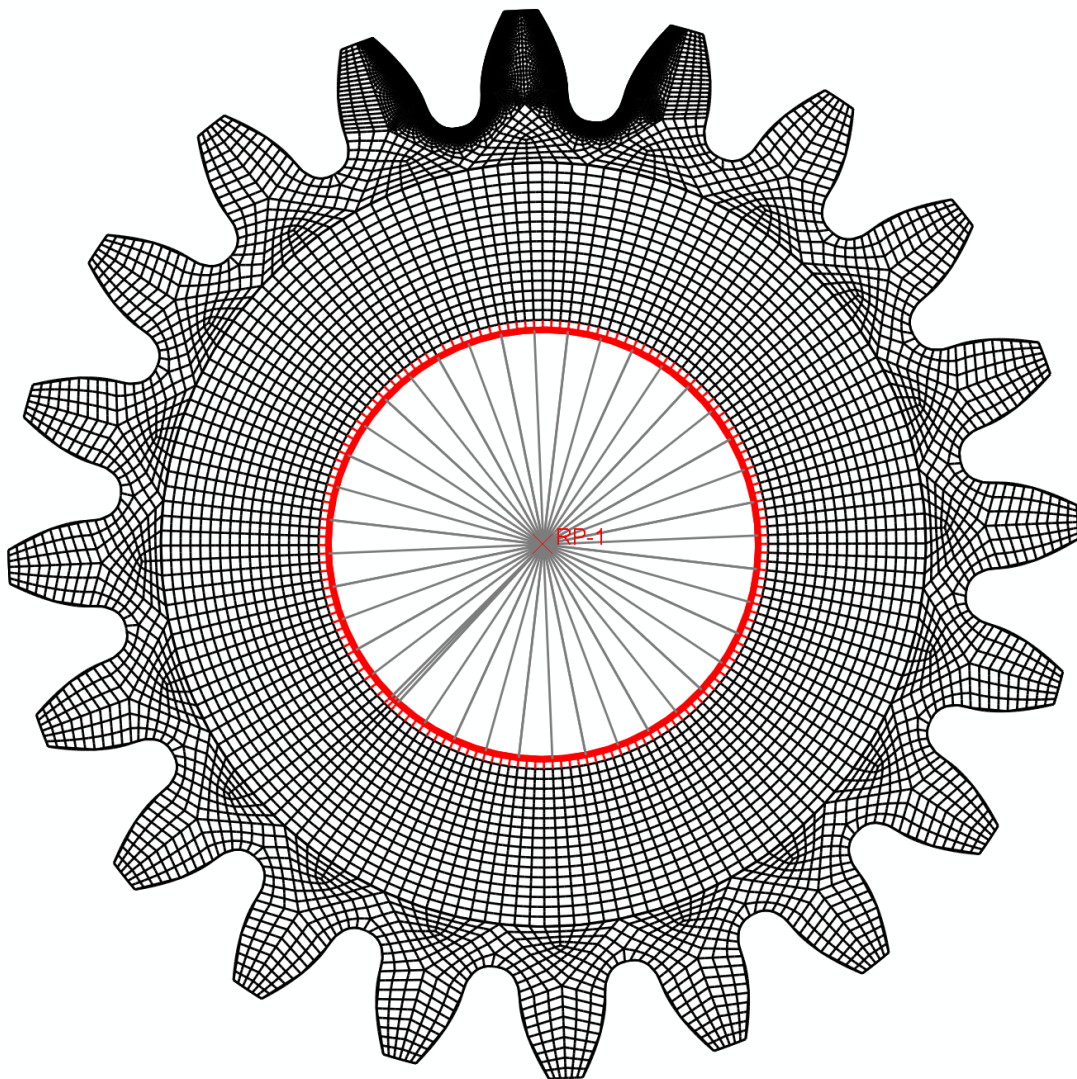
Ispitivanje konvergencije rezultata naprezanja u korijenu zuba provedeno je na gonjenom zupčaniku za slučaj u kojemu se prema normi ISO 6336 [6] računa najveće normalno naprezanje u korijenu zuba.

To je slučaj jednostrukog zahvata u točki B za ispitni zupčanik. Promjer i kut djelovanja koncentrirane sile određeni su grafički pomoću programskog paketa AutoCAD na način da su zupčanici stavljeni u položaj zahvatne točke E te je po zahvatnoj liniji, koja tangira temeljne kružnice, na udaljenosti koraka zahvata ( $p_e$ ) određena točka B, slika 4.3.8. Normalna sila koja djeluje na bok zuba u smjeru zahvatne linije dobivena je iz momenta na pogonskom zupčaniku tako da je moment podjeljen s polumjerom temeljne kružnice koju zahvatna linija tangira.

Ispitnom zupčaniku su posredno preko referentne točke blokirani svi translacijski i rotacijski pomaci. Referentna točka koja se nalazi u centru ispitnog zupčanika je povezana kinematskom vezom s čvorovima na unutarnjem rubu ispitnoga zupčanika slika 4.3.9. Zub je u karakterističnoj točki zahvata B opterećen koncentriranom silom u smjeru zahvatne linije.



Slika 4.3.8 Zahvat točke B



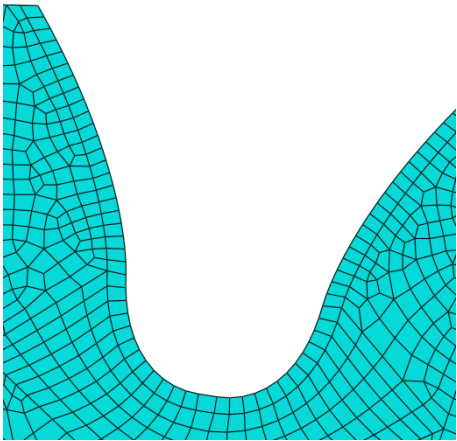
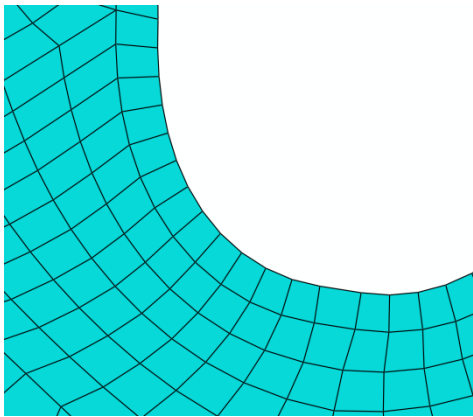
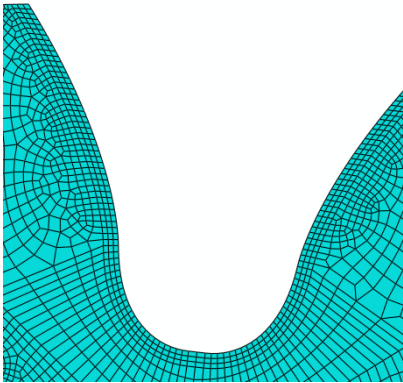
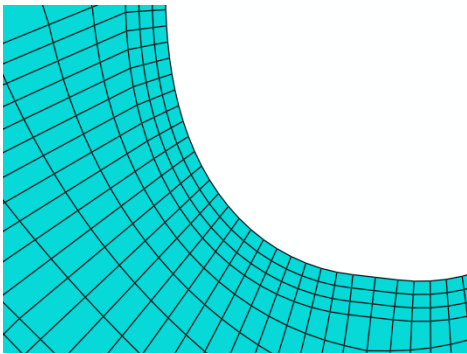
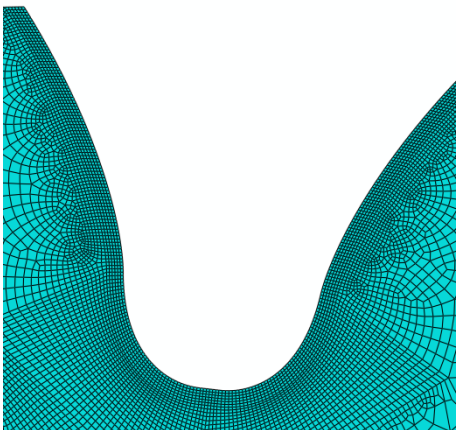
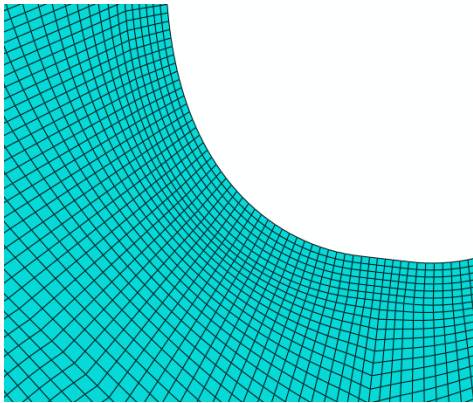
*Slika 4.3.9 Prikaz referentne točke i kinematske veze, **RP-1** – blokirana sva translacijska i rotacijska gibanja*

Promatrani su rezultati za elemente u području prijelaznih krivulja korijena te bokova približne veličine 0,5x0,5mm, 0,2x0,2mm, 0,1x0,1mm 0,04x0,04mm i 0,02x0,02mm.

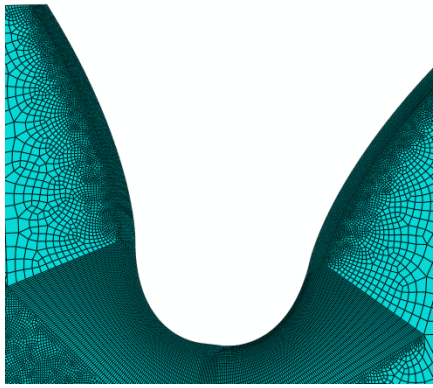
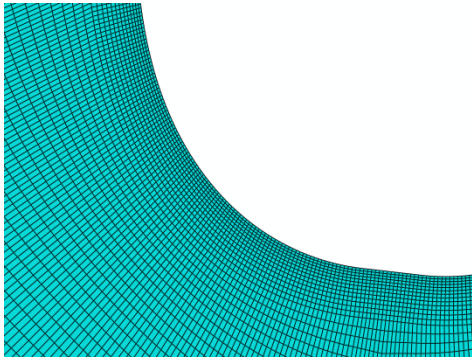
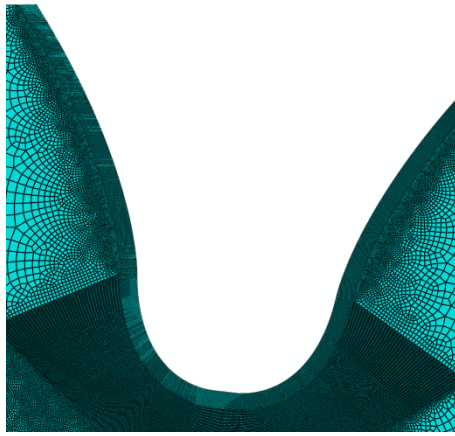
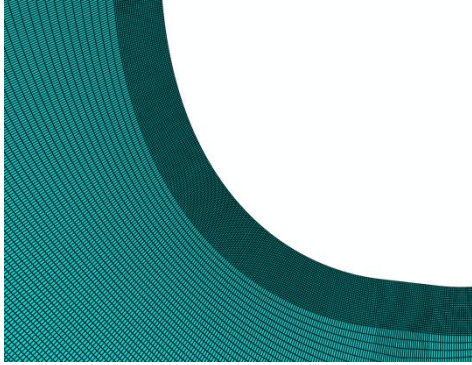
Također su za sve veličine elemenata uspoređeni rezultati i za različite tipove četverokutnih elemenata odnosno elemenata za ravninsko stanje naprezanja CPS4, CPS4I, CPS8R te CPS8.

U tablici 3 prikazane su korištene mreže različitih gustoća diskretizacije.

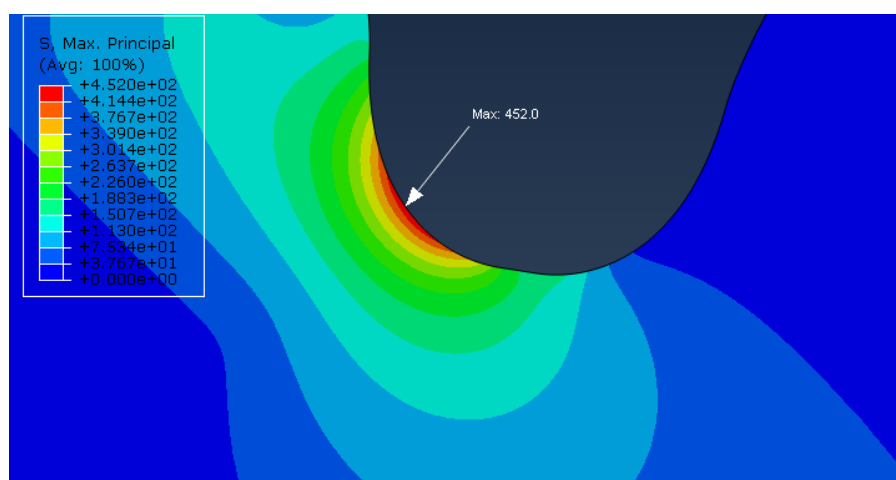
Tablica 3 Prikaz mreža diskretiziranih različitim veličinama elemenata

Mreža uzubine	Mreža u korijenu	Veličina elemenata (u mm)
		0,5x0,5
		0,2x0,2
		0,1x0,1



		<b>0,04x0,04</b>
		<b>0,02x0,02</b>

Na slici 4.3.10. možemo vidjeti maksimalno naprezanje u korijenu zuba s diskretizacijom elementima CPS8R približne veličine 0,04x0,04mm



Slika 4.3.10 Maksimalno naprezanje u korijenu s CPS8R elemntima

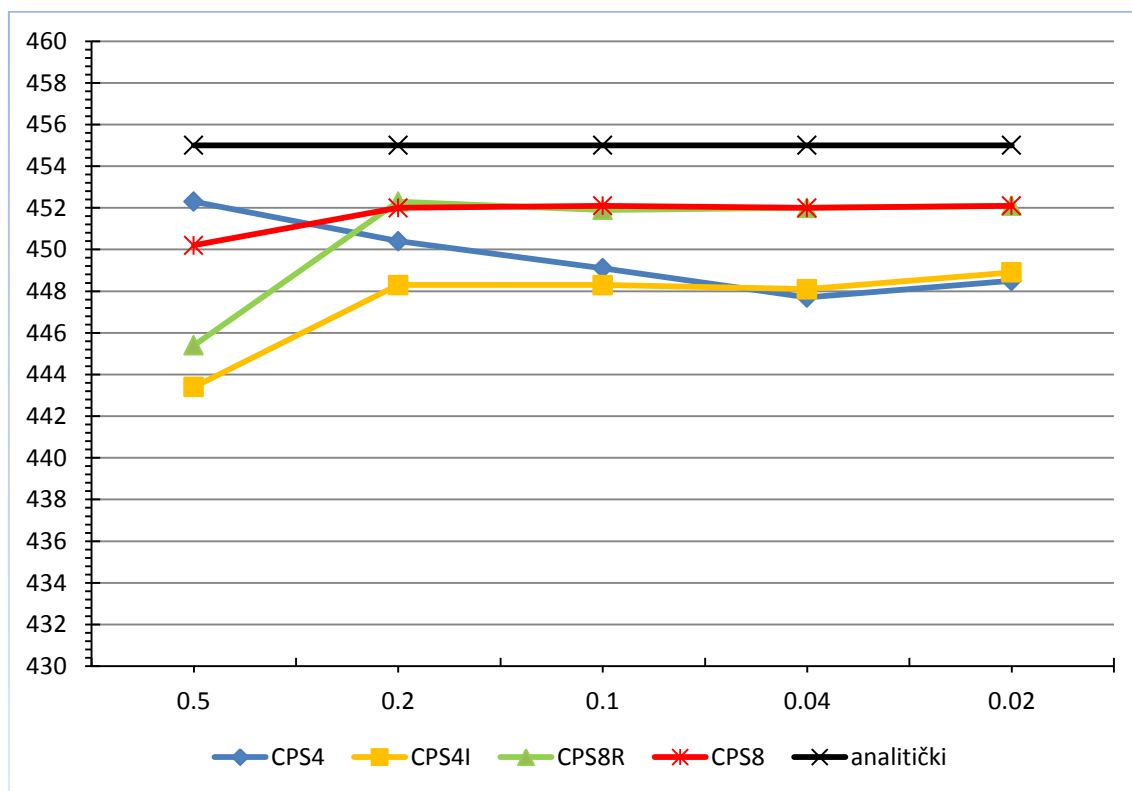
veličine 0,04x0,04 mm



U tablici 4 i dijagramu na slici 4.3.11, vide se rezultati naprezanja u korijenu zuba ispitnog zupčanika za slučaj prilikom karakteristične točke zahvata B uspoređene s rezultatom analitičkog proračuna prema normi ISO 6336.

*Tablica 4 Prikaz rezultata naprezanja za različite tipove elemenata i gustoće diskretizacije (vrijednosti rezultata u MPa)*

Tip elemenata	Približna veličina elemenata u mm					Analitičko rješenje
	0,5x0,5	0,2x0,2	0,1x0,1	0,04x0,04	0,02x0,02	
<b>CPS4</b>	452,3	450,4	449,1	447,7	448,5	455,03 MPa
<b>CPS4I</b>	443,4	448,3	448,3	448,9	448,1	
<b>CPS8R</b>	445,4	452,3	451,9	452	452,1	
<b>CPS8</b>	450,2	452	452,1	452	452,1	

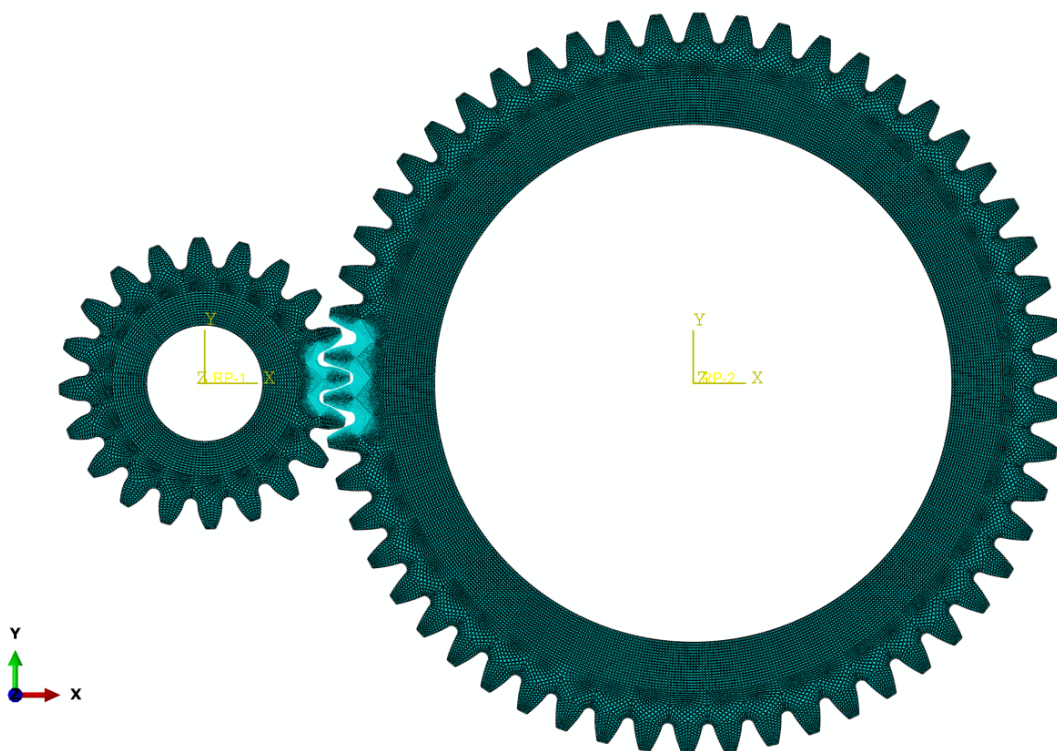


*Slika 4.3.11 Konvergenција rezultata naprezanja u korijenu zuba*

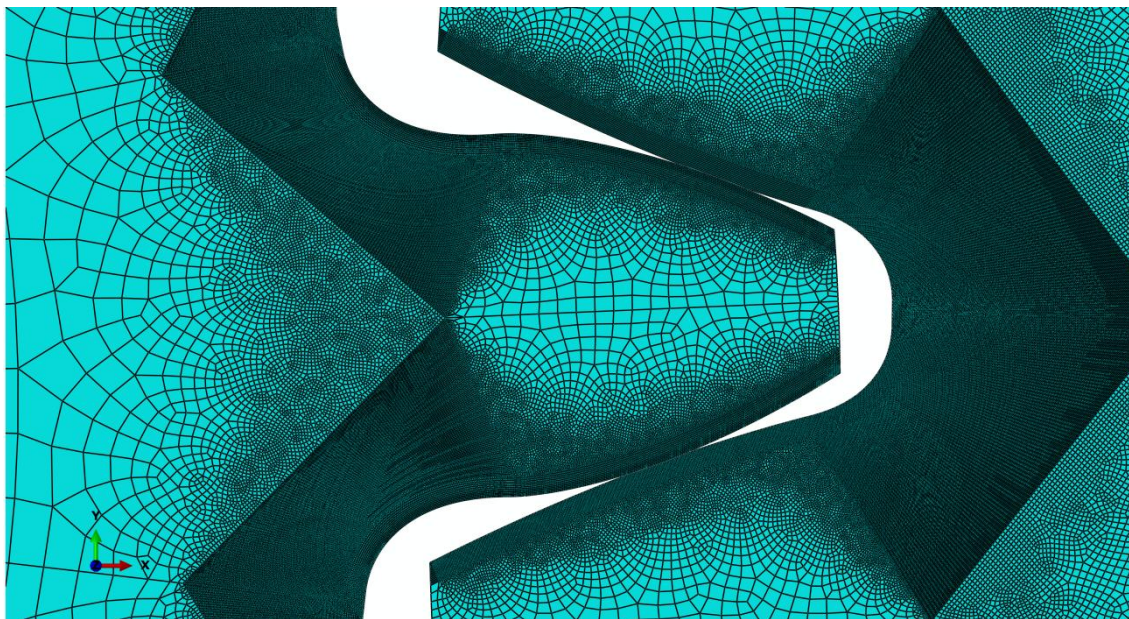
CPS8 i CPS8R elementi drugog reda najbrže konvergiraju, stoga već pri relativno grubljoj mreži (veličine elementa  $0,2 \times 0,2$  mm) odstupaju manje od 1% od analitičkog rješenja. To se također odmah lako uočava zbog položenosti krivulje na dijagramu, odnosno male razlike vrijednosti između rezultata dobivenih različitim gustoćama diskretizacije. CPS4 i CPS4I elementi prvog reda konvergiraju nešto sporije ali također već na relativno gruboj mreži (veličina elemenata  $0,1 \times 0,1$ ) počinju konvergirati i odstupaju manje od 2% od analitičkog rješenja.

Odstupanja od analitičkog rješenja naprezanja u korijenu zuba prema normi ISO 6336 su vrlo mala i posebno je bitno da su naprezanja dobivena metodom konačnih elemenata manja od onih analitičkih. Navedeno je u skladu s rezultatima opisanima u [4].

Kako bi se dobila zadovoljavajuća točnost i vrijeme proračuna na temelju konvergencije rezultata odabrani su CPS8R elementi približne veličine  $0,04 \times 0,04$  mm u područjima aktivnih korijena i bokova tokom zahvata. Ostatak modela zupčanika diskretiziran je istim tipom elemenata približne veličine  $1 \times 1$  mm. Gonjeni zupčanik je diskretiziran s ukupno 34501 elemenata a pogonski s 49357 elemenata.



*Slika 4.3.12 Diskretizirani modeli u zahvatu*



*Slika 4.3.13 Diskretizirani aktivni bokovi u zahvatu*

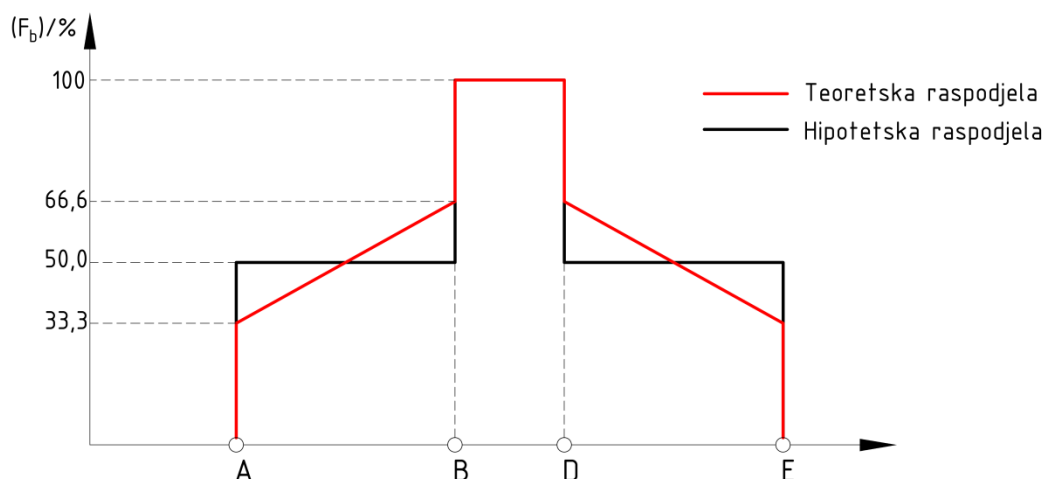
### 4.3.3. Analiza naprezanja u korijenu koncentriranim silama

Zubi su opterećeni u karakterističnim točkama zahvata koncentriranim silama u smjeru zahvatne linije kako je predloženo u normi DIN 3990 [1]. Provedeno je 6 analiza, jedna za svaku karakterističnu točku zahvata kako predlaže norma ISO 6336 i još dodatno 4, 2 za točke prije početka zahvata i 2 za točke nakon završetka zahvata promatranog zuba.

#### ***Rubni uvjeti i opterećenja***

Ispitnom zupčaniku su posredno preko referentne točke blokirani svi translacijski i rotacijski pomaci. Referentna točka koja se nalazi u centru ispitnog zupčanika je povezana kinematskom vezom s čvorovima na unutarnjem rubu ispitnog zupčanika.

Zubi su u određenim karakterističnim točkama zahvata opterećeni koncentriranim silama tako da je normalna sila raspodjeljena prema pravilu  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $3/3$  kako predlaže norma DIN 3990 [1], što znači da je prilikom ulaska u zahvat u karakterističnoj točki zahvata A promatrani zub opterećen s  $1/3$  normalne sile, prilikom prelaska iz dvostrukog u jednostruki zahvat s  $2/3$  normalne sile a prilikom jednostrukog zahvata s punim iznosom ( $3/3$ ) normalne sile u smjeru zahvatne linije. Prilikom izlaska iz zahvata opterećenja se raspodjeljuju na istom principu ali obrnutim rasporedom. Raspodjela opterećenja na zube u zahvatu u položajima karakterističnih točaka zahvata mogu se vidjeti na slici 4.3.14.

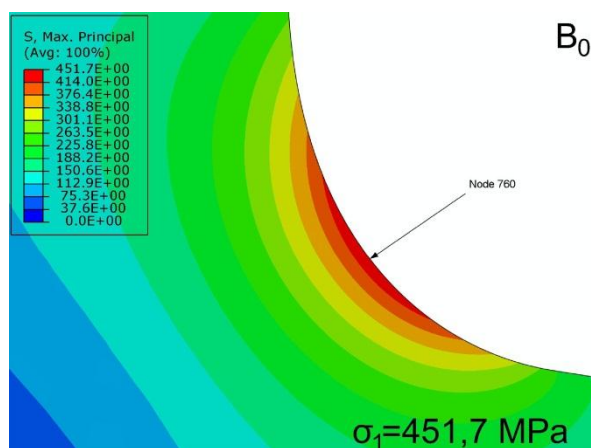


Slika 4.3.14 Raspodjela opterećenja (sile) na zube u zahvatu

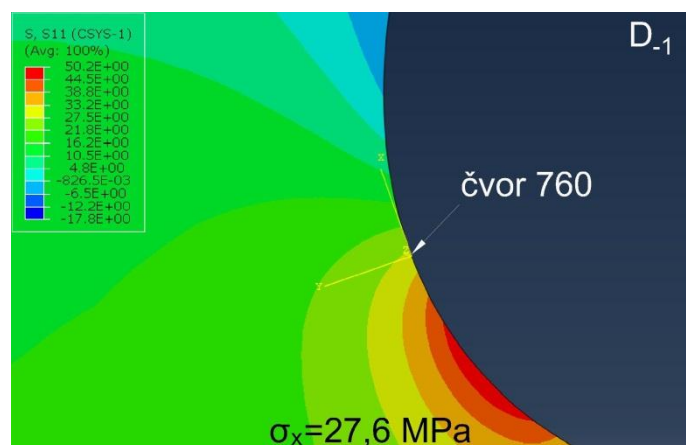
## Rezultati

U karakterističnim točkama zahvata očitana su normalna naprezanja u korijenu zuba u smjeru tangente na prijelaznu krivulju u čvoru s najvećim normalnim naprežanjem (čvor 760). To je čvor čiji kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba iznosi  $38^\circ$ . Pošto u navedenom čvoru vlada jednoosno stanje naprežanja (jer se nalazi na prijelaznoj krivulji) [12] najveće normalno naprežanje  $\sigma_1$  se podudara s iznosom normalnog naprežanja u smjeru tangente na prijelaznu krivulju. U navedenom čvoru postavljen je lokalni koordinatni sustav tako da se  $x$  os poklapa s tangentom na prijelaznu krivulju. U svim analiziranim karakterističnim točkama zahvata su očitana naprežanja  $\sigma_x$  u  $x$  smjeru lokalnog koordinatnog sustava postavljenog na prije opisani način. Također su dodatno nego što predlaže norma ISO 6336 promatrana naprežanja u navedenom čvoru u trenutku potpunog izlaska iz zahvata točke E odnosno prilikom zahvata u točki  $B_1$ , te u trenutku netom prije ulaska točke A u zahvat odnosno prilikom zahvata u točki  $D_{-1}$ .

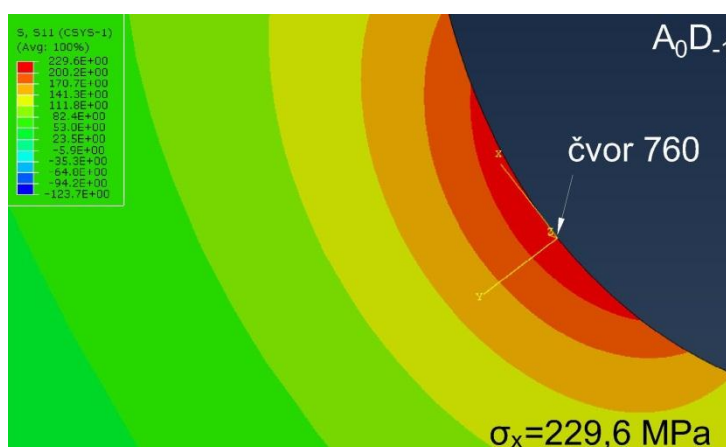
Za opterećenje od 400 Nm na sljedećim slikama prikazana su naprežanja u korijenu zuba ispitnog zupčanika. Dani su i iznosi naprežanja  $\sigma_x$  u čvoru čiji kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba iznosi  $38^\circ$  (što odgovara čvoru 760) za karakteristične točke zahvata.



Slika 4.3.15 Raspodjela naprezanja  $\sigma_1$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $B_0$

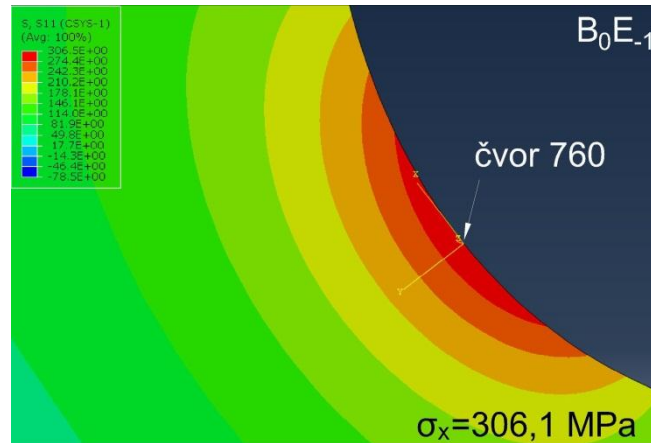


Slika 4.3.16 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $D_{-1}$

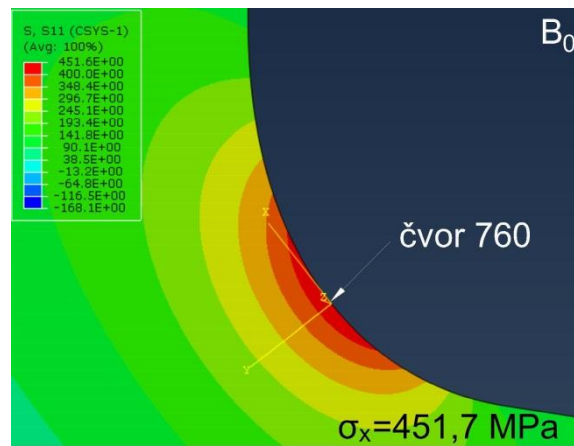


Slika 4.3.17 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $A_0$

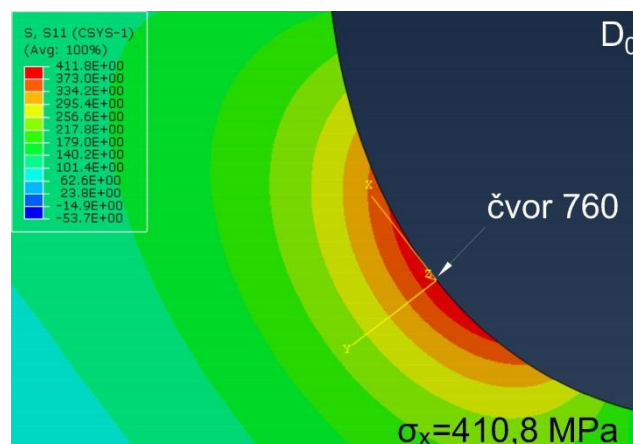




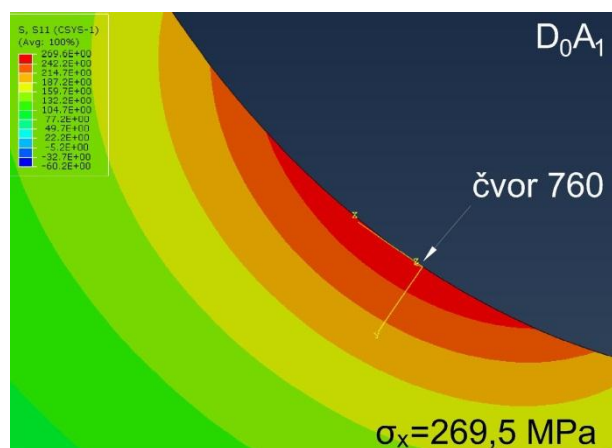
Slika 4.3.18 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $B_0$



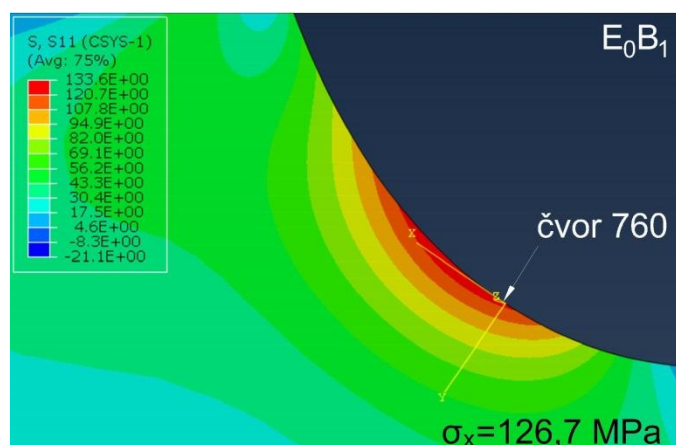
Slika 4.3.19 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $B_0$



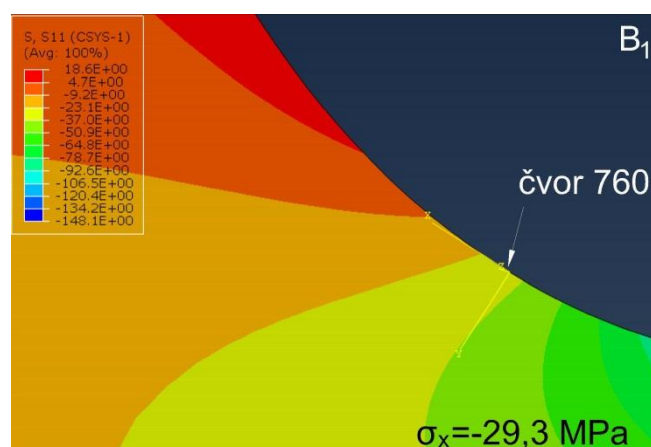
Slika 4.3.20 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $D_0$



Slika 4.3.21 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $D_0$



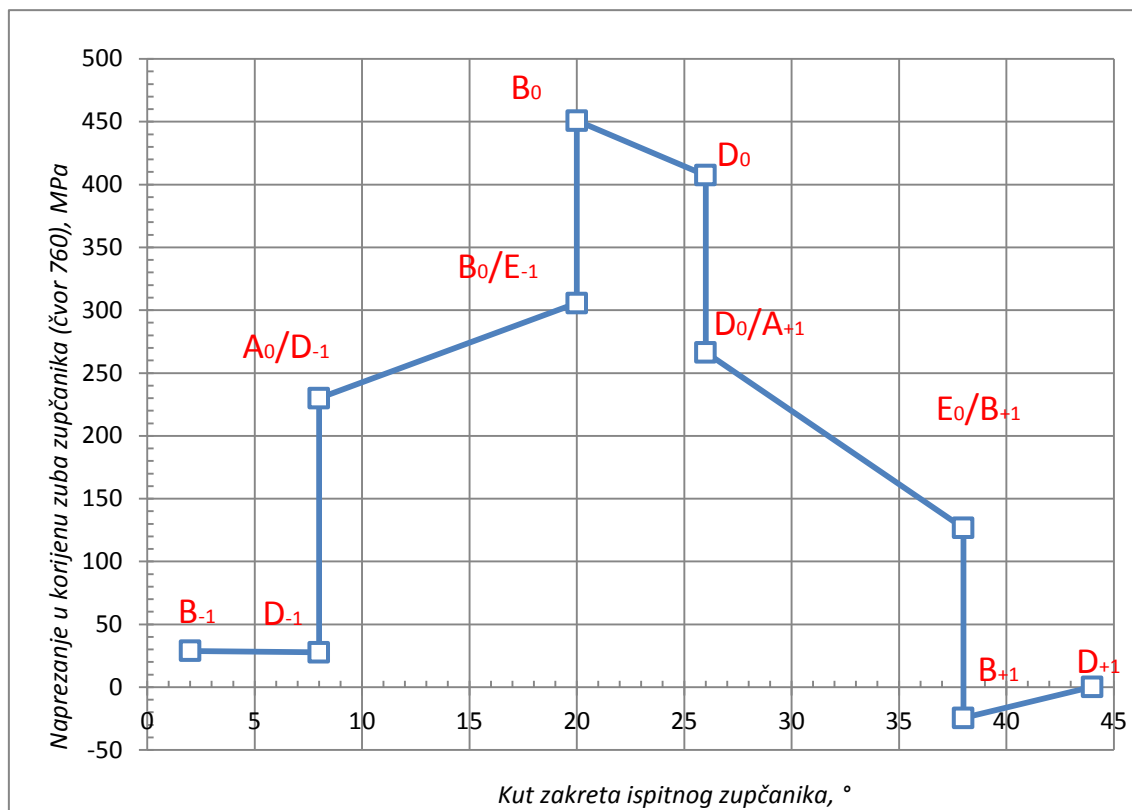
Slika 4.3.22 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $E_0$



Slika 4.3.23 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $B_1$



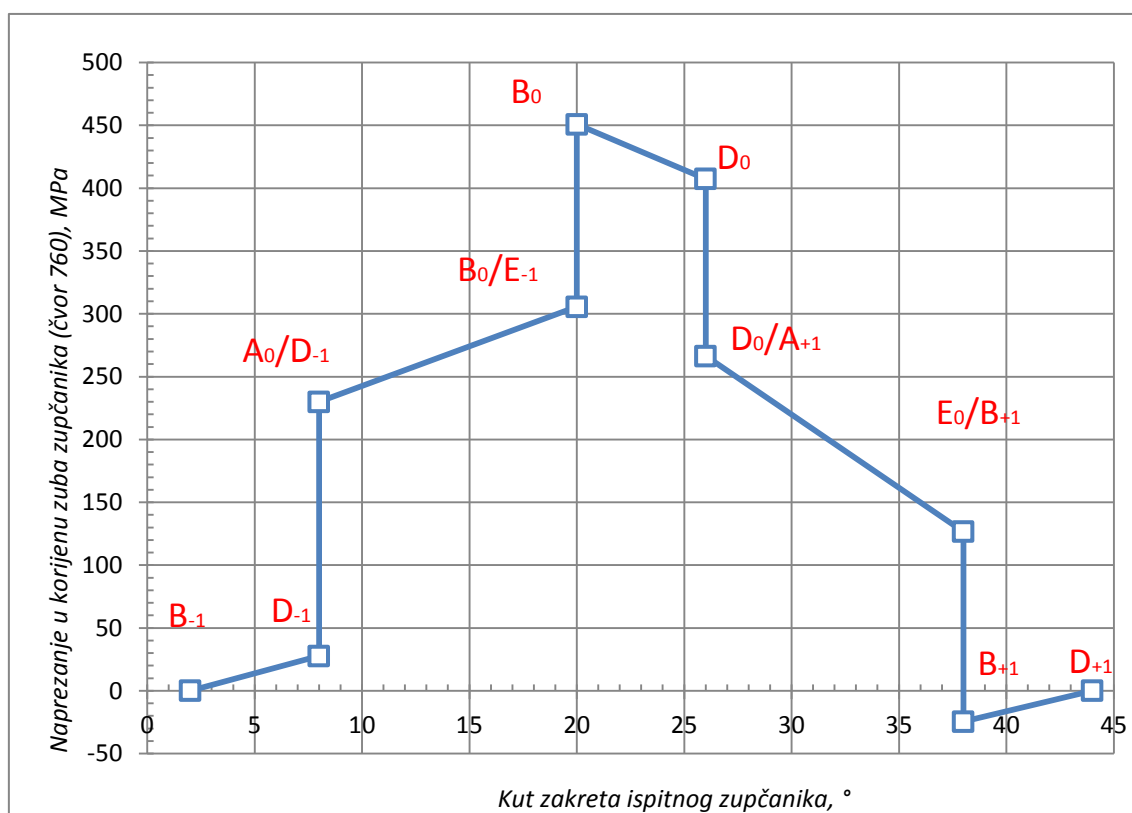
Dijagram na slici 4.3.24 prikazuje iznose naprezanja u karakterističnim točkama zahvata duž zahvatne linije za analizirani čvor u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika.



Slika 4.3.24 Ovisnost naprezanja u čvoru 760 o kutu zakreta ispitnog zupčanika

Iz dobivenih rezultata vidi se ciklus naprezanja u karakterističnim točkama zahvata zupčanika kako predlaže norma ISO 6336 s još dodatnim naprezanjima u promatranom čvoru za točke kada promatrani zub još nije ušao u zahvat ( $D_{-1}$  i  $B_{-1}$ ) te za točke kada je promatrani zub već izašao iz zahvata ( $B_{+1}$  i  $D_{+1}$ ). Vidljivo je da se u korijenu zuba zupčanika javljaju naprezanja i prije i nakon što izađe iz zahvata, koja norma ne obuhvaća. To su vlačna naprezanja u karakterističnim točkama prije ulaska u zahvat promatranog zuba  $B_{-1}$ ,  $D_{-1}$ . Posebno su zanimljiva naprezanja koja se javljaju u karakterističnoj točki  $B_{+1}$  u trenutku kada je analizirani zub napustio zahvat, a ona su normalna naprezanja s negativnim predznakom (tlačna naprezanja) i iznose -29,3 MPa. U karakterističnoj točki zahvata  $D_{+1}$  sila na analiziranom zubu je jednaka nuli, a cjelokupno opterećenje je na zubu koji slijedi, također u karakterističnoj točki zahvata  $B_{-1}$  sila je jednaka nuli, a cjelokupno opterećenje je na zubu koji prethodi, naprezanja

nisu jednaka nuli, ali će se uzeti ovdje takvima, radi opisivanja jednog ciklusa, dijagram, slika 4.3.25.



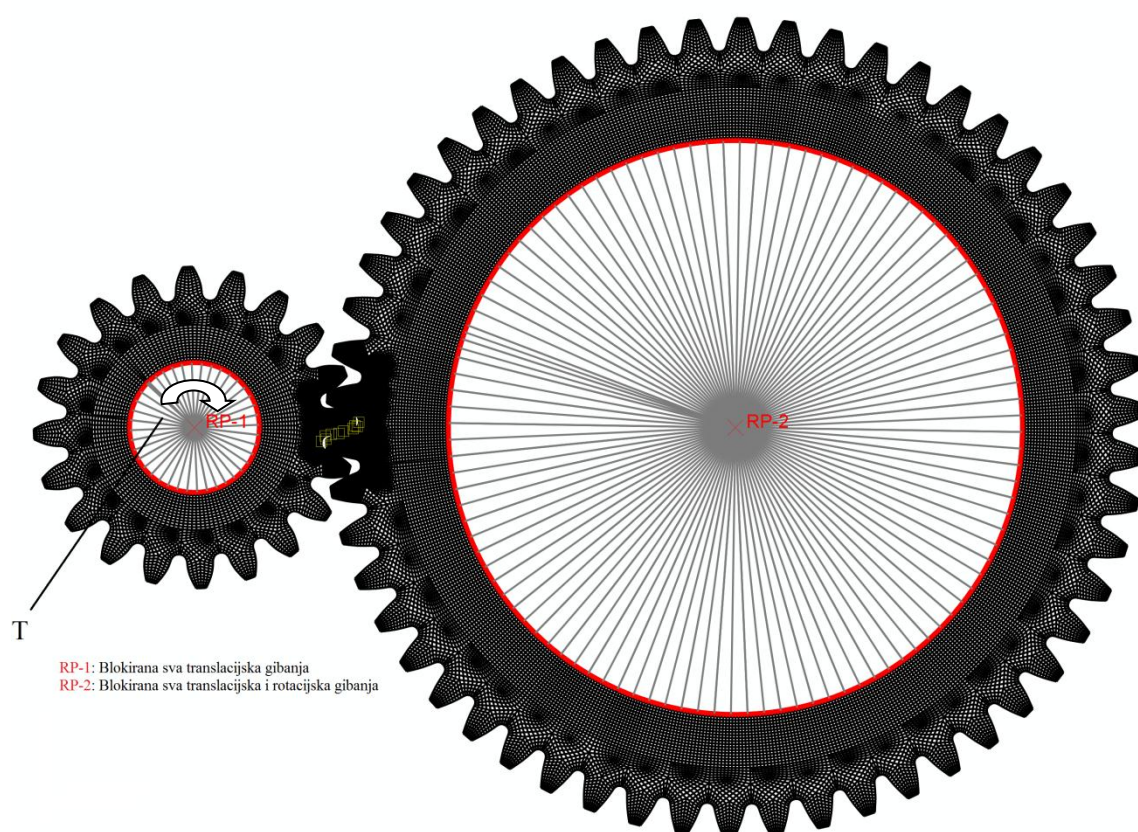
Slika 4.3.25 Ciklus naprezanja u čvoru 760 u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika

#### **4.3.4. Analiza naprezanja u korijenu definiranjem kontakata između zubi**

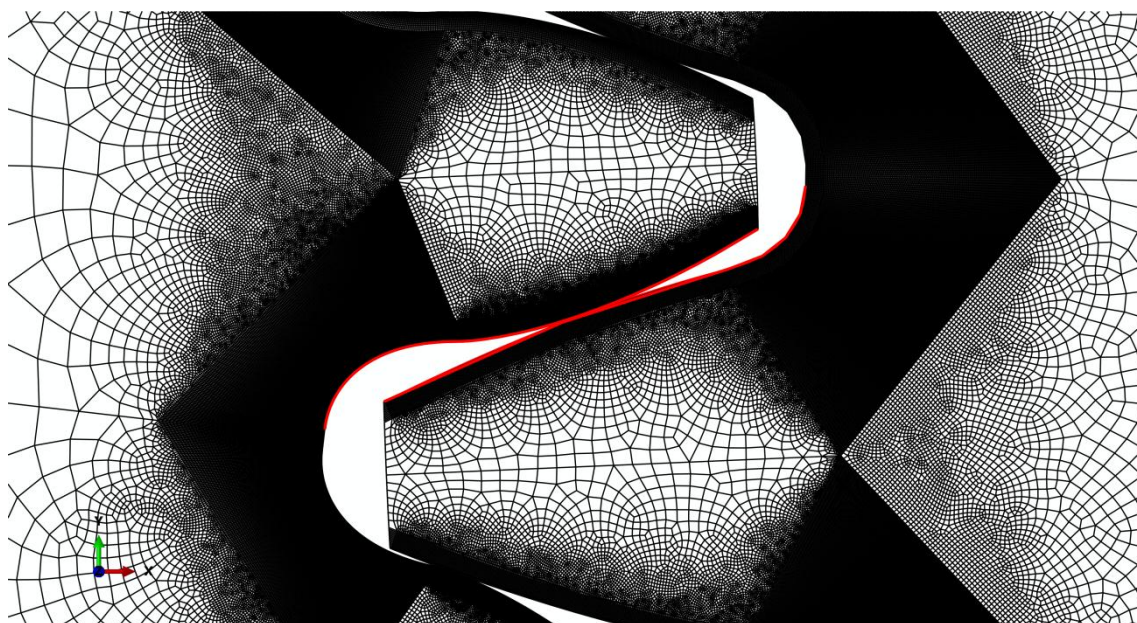
Zupčanici su postavljeni u položaje karakterističnih točaka zahvata zakretanjem pogonskog i gonjenog zupčanika, svakog oko svoje osi. Za određene karakteristične točke zahvata, zakretani su za kuteve grafički očitane iz nacrtu zahvata u određenim točkama (poglavlje 4.3.1. *Zahvat zupčanika*). Definiranjem kontakata između zubi i opterećivanjem gonjenog zupčanika momentom dobivena su naprezanja u korijenu zuba.

##### ***Rubni uvjeti i opterećenja***

Nakon postavljanja zupčanika u položaj određene karakteristične točke zahvata, pogonskom zupčaniku su posredno preko referentne točke blokirana sva translacijska i rotacijska gibanja. Gonjenom zupčaniku također posredno preko referentne točke su onemogućena translacijska gibanja i dodjeljen mu je moment od 400 Nm. Referentne točke koje se svaka nalaze u centru pogonskog odnosno gonjenog zupčanika su vezane kinematskom vezom s čvorovima na unutarnjem rubu zupčanika, slika 4.3.26. Prijenos opterećenja s jednog na drugi zupčanik ostvaren je modeliranjem kontakata između aktivnih bokova zubi uz zanemarivanje trenja kao što se može vidjeti na slici 4.3.27. Kontakt je simuliran u programskom paketu *ABAQUS/Standard* korz odabir opcije *hard contact*.



Slika 4.3.26 Prikaz referentnih točaka, kinematskih veza i opterećenja momentom gonjenog zupčanika

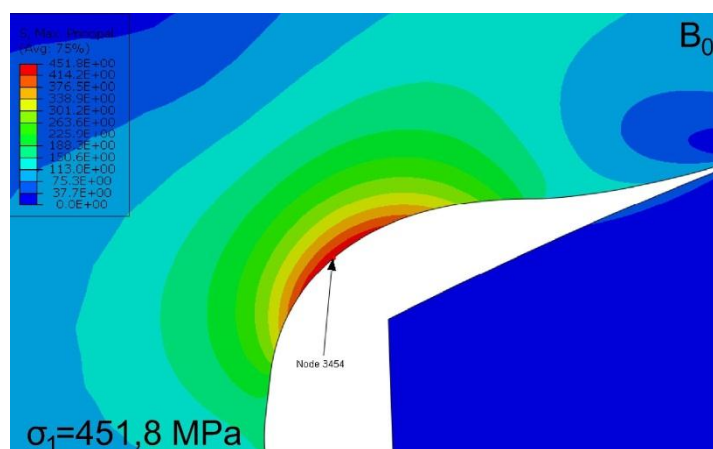


Slika 4.3.27 Prikaz definiranog kontakta prilikom zahvata u točki B

## Rezultati

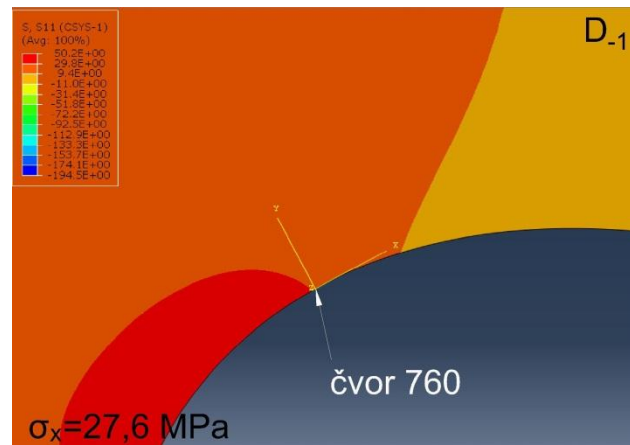
Isto kao i kod analize koncentriranim silama u karakterističnim točkama zahvata očitana su normalna naprezanja u čvoru s najvećim normalnim naprežanjem (čvor 3454). To je također čvor čiji kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba iznosi  $38^\circ$ . U svim analiziranim karakterističnim točkama zahvata su očitana naprezanja  $\sigma_x$  u lokalnom koordinatnom sustavu postavljenom na prije opisani način u poglavlju 4.3.3. Također su dodatno nego što predlaže norma ISO 6336 promatrana naprezanja u navedenom čvoru u trenutku potpunog izlaska iz zahvata točke E odnosno prilikom zahvata u točki  $B_1$ , te u trenutku netom prije ulaska točke A u zahvat odnosno prilikom zahvata u točki D.

Za opterećenje od 400 Nm na sljedećim slikama prikazana su naprezanja u korijenu zuba ispitnog zupčanika. Dani su i iznosi naprezanja  $\sigma_x$  u čvoru čiji kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba iznosi  $38^\circ$  (što odgovara čvoru 3454) za karakteristične točke zahvata.

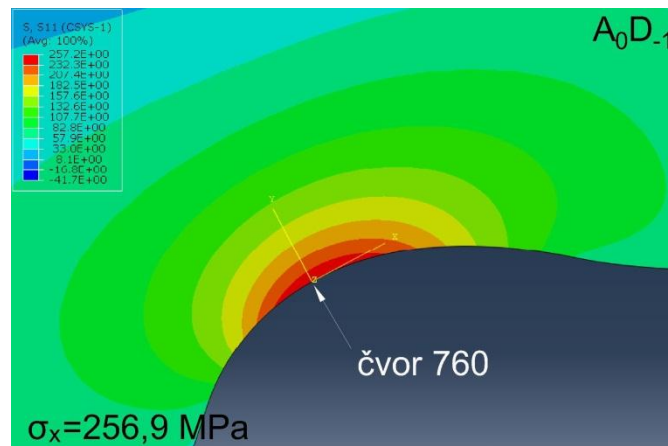


Slika 4.3.28 Raspodjela naprezanja  $\sigma_1$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $B_0$

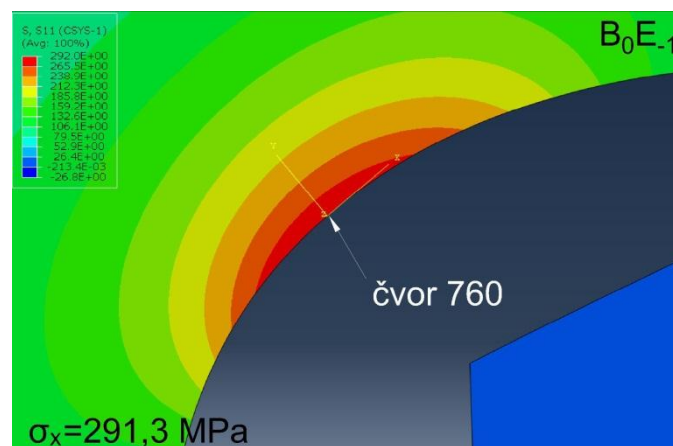




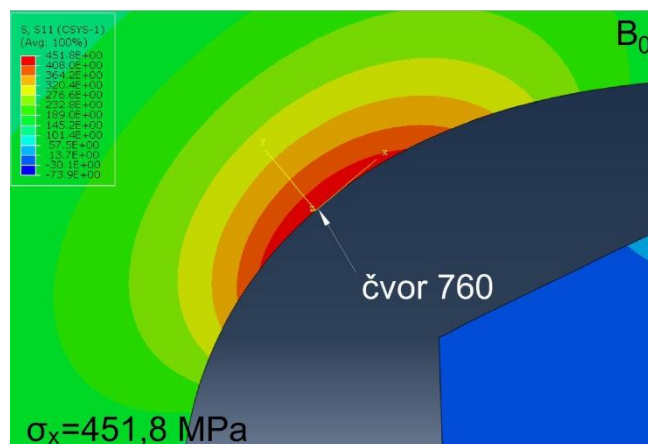
Slika 4.3.29 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $D_{-1}$



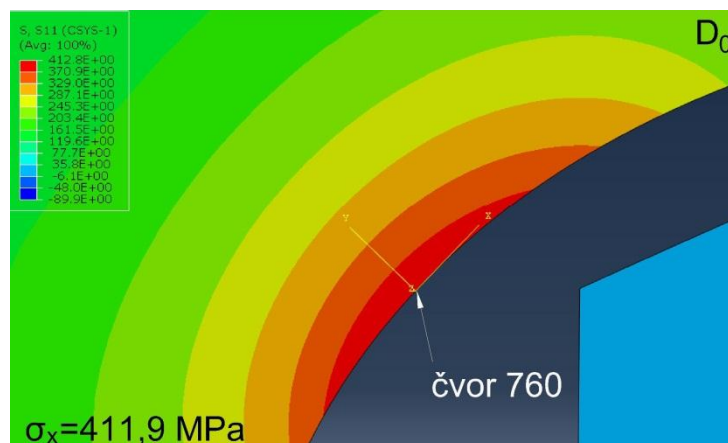
Slika 4.3.30 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $A_0$



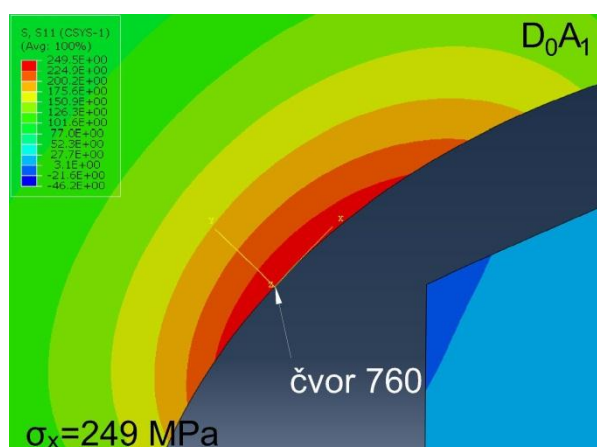
Slika 4.3.31 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $B_0$



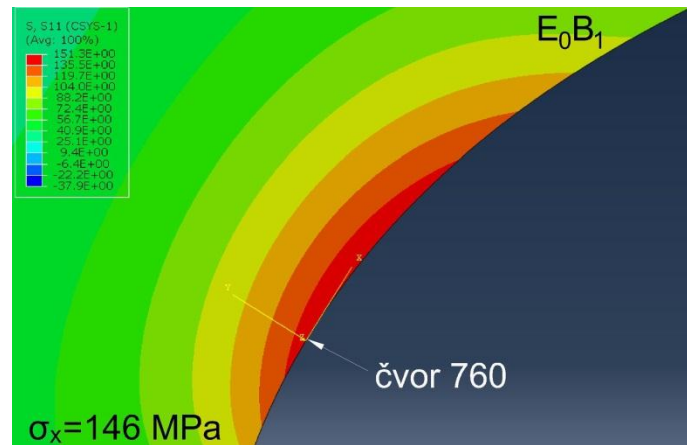
Slika 4.3.32 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $B_0$



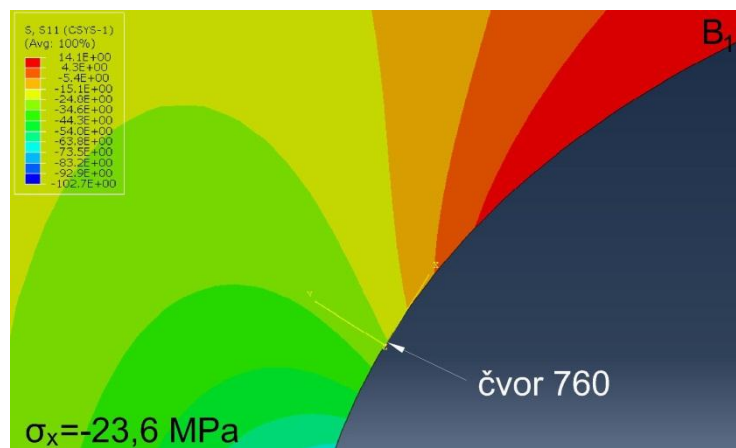
Slika 4.3.33 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $D_0$



Slika 4.3.34 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $D_0$



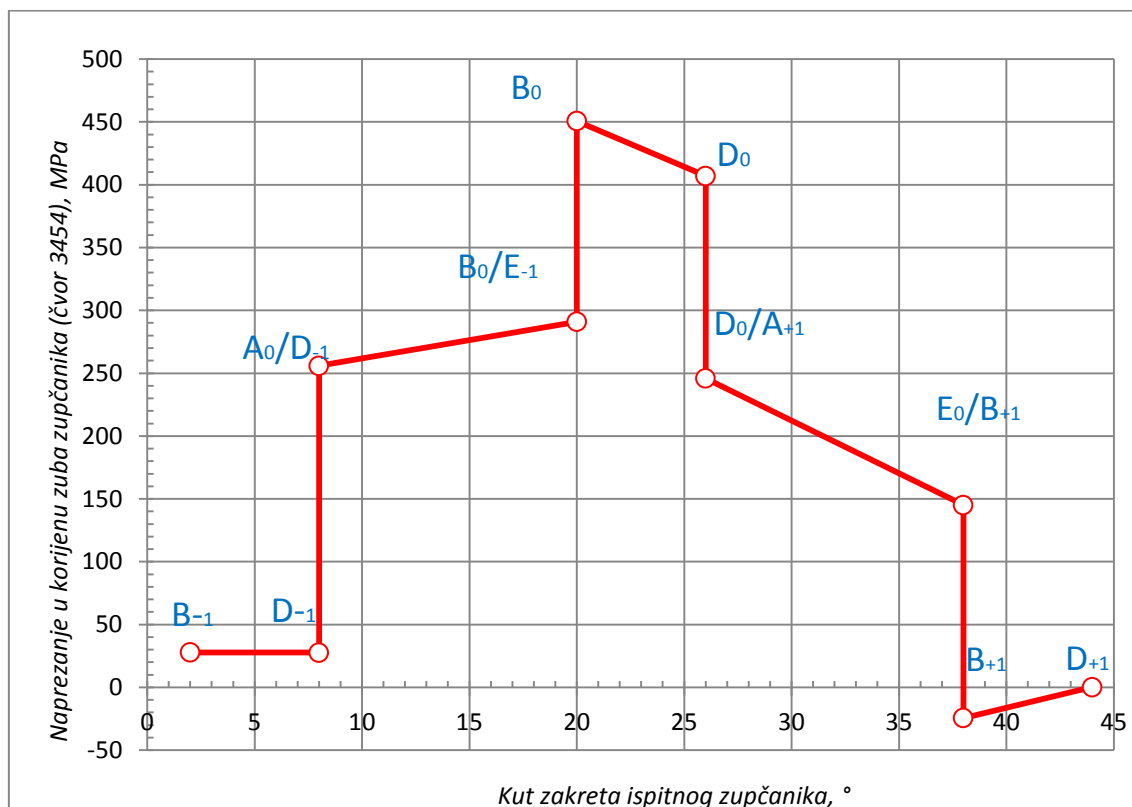
Slika 4.3.35 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za dvostruki zahvat u točki  $E_0$



Slika 4.3.36 Raspodjela naprezanja  $\sigma_x$  u korijenu aktivnog zuba za jednostruki zahvat u točki  $B_1$

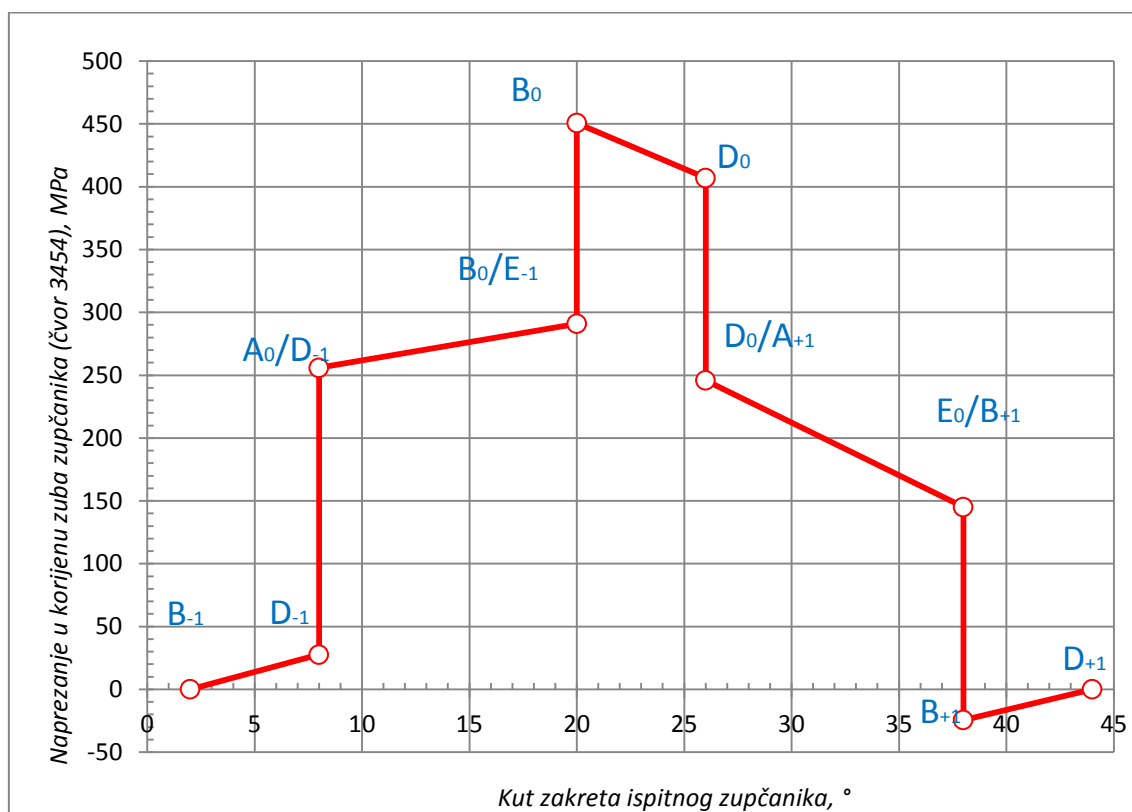
Dijagram na slici 4.3.37 prikazuje rezultate naprezanja za karakteristične točke zahvata u ovisnosti o kutu zakreta zupčanika.





Slika 4.3.37 Ovisnost naprezanja u čvoru 3454 o kutu zakreta ispitnog zupčanika

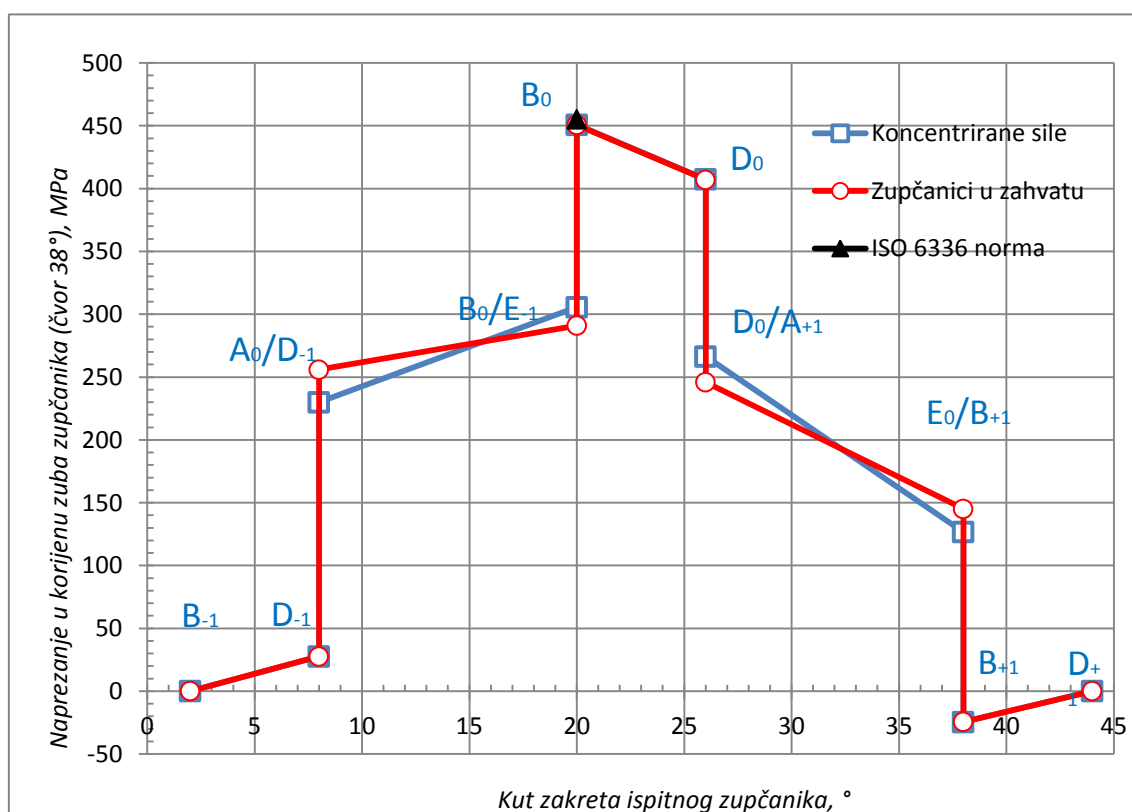
Iz dobivenih rezultata prilikom ovog načina analize, definiranjem kontakata među zubima, također se vidi ciklus naprezanja u karakterističnim točkama zahvata zupčanika kako predlaže norma ISO 6336, s još dodatnim naprezanjima u promatranom čvoru za točke kada promatrani zub još nije ušao u zahvat (D<sub>-1</sub> i B<sub>-1</sub>) te za točke kada je promatrani zub već izašao iz zahvata (B<sub>+1</sub> i D<sub>+1</sub>). Također je vidljivo da se u korijenu zuba zupčanika javljaju naprezanja prije ulaska u zahvat i nakon što izađe iz zahvata, koja norma ne obuhvaća. To su vlačna naprezanja u točkama prije ulaska u zahvat promatranog zuba (B<sub>-1</sub>, D<sub>-1</sub>) te tlačna naprezanja u trenutku kada je praćeni zub napustio zahvat (B<sub>+1</sub>). U karakterističnoj točki zahvata D<sub>+1</sub> sila na analiziranom zubu je jednaka nuli, a cjelokupno opterećenje je na zubu koji slijedi, također u karakterističnoj točki zahvata B<sub>-1</sub> sila je jednaka nuli, a cjelokupno opterećenje je na zubu koji prethodi, naprezanja nisu jednaka nuli, ali će se uzeti ovdje takvima, radi opisivanja jednog ciklusa, slika 4.3.38.



Slika 4.3.38 Ciklus naprezanja u čvoru 3454 u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika

## 5. Usporedba rezultata

Na dijagramu na slici 5.3.1. možemo vidjeti usporedbu dva različita ciklusa naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivena metodom konačnih elemenata. Također možemo vidjeti i usporedbu opisanih postupaka s rezultatima analitičkog proračuna pomoću ISO 6336 norme u trenutku točke zahvata  $B_0$ .



Slika 5.1 Usporedni prikaz ciklusa naprezanja u čvoru čiji kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba iznosi  $38^\circ$  u ovisnosti o kutu zakreta ispitnog zupčanika

Usporedbom rezultata vidljivo je da naprezanja odstupaju manje od 1% od najvećeg naprezanja izračunatog prema ISO 6336 normi u trenutku karakteristične točke zahvata  $B_0$ . Kao što smo već spomenuli važno je da su naprezanja dobivena metodom konačnih elemenata manja od onih dobivenih analitičkim proračunom. Navedeno je u skladu s rezultatima opisanima u [4]. Također je vidljivo da se oba načina ispitivanja metodom konačnih elemenata na koje smo analizirali naprezanja u korijenu zuba poklapaju u manje od 1% u jednostrukim točkama zahvata B i D. Razlike se vide

prilikom dvostrukih točaka zahvata iz razloga što su kod ispitivanja koncentriranim silama, opterećenja koja djeluju na zube u zahvatu u karakterističnim točkama zahvata raspodjeljene prema pravilu 1/3,2/3,3/3 kako predlaže norma DIN 3990 [1]. Prilikom ispitivanja postavljanjem zupčanika u karakteristične točke zahvata, opterećenje je raspodjeljeno modeliranjem kontakata između zubi u zahvatu. Tlačno naprezanje u točki  $B_{+1}$  je vidljivo i na jednom i na drugom dijagramu.

## 6. Zaključak

U radu je metodom konačnih elemenata određen ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika u zahvatu s teorijski točnim profilom za zadane parametre. Analizirani cilindrični zupčanik s vanjskim evolventnim ozubljenjem ravnim zubima je gonjeni član zupčanog para. Stanje naprezanja i deformacija u korijenu zuba određeno je pomoću dvodimenzijskih modela diskretiziranim dvodimenzijskim elementima za ravninsko stanje naprezanja. Izrađena su dva različita modela za analizu naprezanja u korijenu zuba zupčanika.

Prvi zaključak je da kut tangente na prijelaznu krivulju u čvoru s najvećim naprežanjem u korijenu zuba iznosi  $38^\circ$ , iz čega slijedi da se položaj kritičnog mjesta ne nalazi na kritičnom presjeku određenom kutom tangente  $30^\circ$  kako to predlaže proračun opisan u normi ISO 6336. Konkretno, mjesto najvećeg glavnog naprezanja je pomaknuto prema podnožju korijena zuba.

Također je pokazano da je ciklus naprezanja u korijenu zuba naizmjeničan. Odnosno u trenutku izlaska zuba iz zahvata naprežanje u korijenu aktivnog boka zuba, a zbog utjecaja opterećenja sa susjednog zuba, iz vlačnog područja prelazi dijelom i u tlačno. Taj tlačni dio ciklusa naprezanja koji se javlja prilikom zahvatnog ciklusa povećava amplitudu naprezanja koja se javljaju u promatranome čvoru za oko 5%. Navedeno povećanje amplitude naprezanja bi moglo negativno utjecati na faktor sigurnosti korijena zuba.

## 7. Literatura

- [1] DIN 3990 Teil 3, Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit, Beut Verlag GMBH, Berlin, 1987.
- [2] ANSI/AGMA 2001-B88, Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth, American Gear Manufacturing Association, Alexandria, 1990.
- [3] JGMA 6101-01, Calculation of Bending Strength for Spur and Helical Gears, 1988.
- [4] Jurnal of Mechanical Design September 2006, Vol 128, Comparative Analysis of Tooth-Root Strength Using ISO and AGMA Standards in Spur and Helical Gears With FEM-based Verification, Andrzej Kawalec
- [5] N. Arai, S. Harada, N. Mori, M. Okamoto, Study on Stresses at the Root Fillet of Tooth, Deformation and Accuracy Deterioration of Spur Gear with a Thin Rim when Rate of Load Distribution under Dynamic Condition is Considered, Bulletin of the JSME, Vol. 28, No. 236, 350-358, 1985.
- [6] ISO 6336, Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears, 2006.
- [7] Doktorski rad, Krešimir Vučković, Nastanak zamorne pukotine u korijenu zuba zupčanika s tankim vijencem, 2009.
- [8] ABAQUS 6.12, Dassault Systemes, Simulia, 2012.
- [9] Linke H, Börner J., "The influence of neighbouring teeth on the tooth root capacity", International Gearing Conference. Newcastle, UK, 1994.
- [10] ISO 53, Cylindrical gears for general and heavy engineering – Standard basic rack tooth profile
- [11] *Abaqus* User's guide and theoretical manual, Version 6.8, Hibbitt, Karlsson & Serensen, Inc., 2008.
- [12] Pehan, S., Hellen, T.K., Flašker, J., Glodež, S., Numerical Methods for Determining Stress Intensity Factors vs Crack Depth in Gear Tooth Roots, International Journal of Fatigue, 13 (10), pp. 677-685, 1997.

- [13] MacAldener, M., Olsson, M., Interior Fatigue Fracture of Gear Teeth, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 23, pp. 283-292, 2000.